ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ
15/04/2024

ΘΕΜΑ 1. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\phi(x, y) = (x, y - x), \qquad \psi(x, y) = (x + \frac{1}{2}y, x - \frac{1}{2}y)$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $(\mathbb{R}^2, \phi)$, $(\mathbb{R}^2, \psi)$ ανήκουν στην συνήθη διαφορική δομή του $\mathbb{R}^2$ και να υπολογιστεί η απεικόνιση $\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1}$.

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι συντεταγμένες του χάρτη $(\mathbb{R}^2, \psi)$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = xy - 2y^2$, να υπολογιστούν τα $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{(0,\frac{1}{2})}$, $i = 1, 2$.

ΘΕΜΑ 2 Έστω $p = (0, 1, 0) \in U_N \subseteq S^2$ και x_1, x_2 οι συντεταγμένες του χάρτη (U_N, ϕ_N) της S^2.

(α) Αν $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha(t) = (0, \cos 2t, \sin 2t)$, να αποδειχθεί ότι η α είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη της S^2 που περνά από το p.

(β) Να εκφραστεί το διάνυσμα $u = [(p, \alpha)] \in T_pS^2$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $i = 1, 2$.

ΘΕΜΑ 3 (α) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $\xi \in \mathcal{X}(M)$, $\eta \in \mathcal{X}(N)$ και $f : M \to N$ διαφορίσιμη. Να δείξετε ότι τα ξ, η είναι f-συσχετισμένα, αν και μόνον αν η f μεταφέρει τις ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ σε ολοκληρωτικές καμπύλες του η.

(β) Θεωρούμε στο $\mathbb{R}^2$ την συνήθη διαφορική δομή και συμβολίζουμε x_1, x_2 τις συντεταγμένες του ταυτοτικού χάρτη. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του $[\xi, \eta]$, για

$$\xi = 2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - 3x_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\eta = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

ΘΕΜΑ 4 (α) Να δώσετε τον ορισμό της διαφορικής ροής και του απειροστικού γεννήτορα σε μια πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$.

(β) Να δείξετε ότι η ροή του S^2

$$\theta((x, y, z), t) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z), \qquad (x, y, z) \in S^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη.

(γ) Να υπολογίσετε τον απειροστικό γεννήτορα ξ της θ.

(δ) Να υπολογίσετε τα σημεία $p \in S^2$ στα οποία $\xi_p = 0$.

Να γραφούν 3 από τα 4 θέματα
Καλή επιτυχία!!!