ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11-12
Ολοκληρωτικές Καμπύλες - Ροές

1. Βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες των επόμενων διανυσματικών πεδίων του $\mathbb{R}^2$:

(α)
$$\xi = y\frac{\partial}{\partial y},$$

(β)
$$\zeta = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y},$$

(γ)
$$\eta = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

2. Θεωρώντας το $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ σαν ανοιχτή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2$, βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του $\xi \in \mathcal{X}\left(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\right)$, με

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

3. Έστω α μια ολοκληρωτική καμπύλη του $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $f : M \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας την ταύτιση $T_t\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\overbrace{f \circ \alpha}^{\cdot} = \xi(f) \circ \alpha.$$

4. Βρείτε τις ροές των διανυσματικών πεδίων του $\mathbb{R}^2$:

$$\xi = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \;\; \eta = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \;\; \zeta = x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Είναι αυτά τα πεδία πλήρη;

5. Έστω $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ με $\xi = x^2 d/dx$ [όπου x συμβολίζει την μοναδική συντεταγμένη του $(\mathbb{R}, \mathbf{id}_{\mathbb{R}})$], δηλ. $\xi(t) = t^2 \left.\frac{d}{dx}\right|_t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι ξ δεν είναι πλήρες και βρείτε την ροή του.

6. Έστω
$$\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \theta\big(t, (x,y)\big) = \big((2 + \sin y)t + x, y\big).$$
Δείξτε ότι η θ είναι ροή και βρείτε τον απειροστικό της γεννήτορα.

7. Έστω ξ και η πλήρη διανυσματικά πεδία των πολλαπλοτήτων M και N, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με α_x και β_y τις ολοκληρωτικές καμπύλες των ξ και η, με αρχικές συνθήκες $x \in M$ και $y \in N$, αντίστοιχα. Τότε:

1) Δείξτε ότι $\gamma(t) := \big(\alpha_x(t), \beta_y(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του $\xi \times \eta$, με αρχική συνθήκη (x, y).

2) Βρείτε την ροή θ του $\xi \times \eta$.

3) Επαληθεύστε ότι ο απειροστικός γεννήτορας της θ είναι το $\xi \times \eta$.