ΜΑΘΗΜΑ 10

1 Αγκύλη Lie

Έστω $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Επειδή $\xi(f), \eta(f) \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, μπορούμε να ορίσουμε τα $\xi(\eta(f))$ και $\eta(\xi(f))$ που είναι επίσης στοιχεία του $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.

1.1 Ορισμός. Για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, η απεικόνιση

$$\begin{gathered} [\xi,\eta] : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) : \\ [\xi,\eta](f) := \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f)) \end{gathered} \tag{1}$$

καλείται **αγκύλη Lie** των ξ και η.

Απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι η απεικόνιση (1) είναι μια παραγώγηση της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.7 του Μαθήματος 09, είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Έτσι, η αγκύλη Lie μπορεί να θεωρηθεί σαν πράξη

$$[\ ,\ ] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (\xi,\eta) \longmapsto [\xi,\eta] \tag{2}$$

1.2 Πρόταση. *Η αγκύλη Lie (2) έχει τις επόμενες ιδιότητες:*

(i) Είναι $\mathbb{R}$-διγραμμική.

(ii) Είναι αντισυμμετρική, δηλαδή,

$$[\xi,\eta] = -[\eta,\xi],$$

για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$.

(iii) Ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi

$$[[\xi,\eta],\zeta] + [[\eta,\zeta],\xi] + [[\zeta,\xi],\eta] = 0$$

για κάθε $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(M)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος με μια πράξη που ικανοποιεί τις συνθήκες (i)–(iii) της προηγούμενης πρότασης ονομάζεται **άλγεβρα Lie**.

1.3 Παρατήρηση. Η αγκύλη Lie είναι $\mathbb{R}$–διγραμμική, αλλά δεν είναι διγραμμική ως προς την δομή του $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$–προτύπου. Έτσι, αν $\xi,\eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f,g,h \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, τότε

$$\begin{aligned}
[f\xi, g\eta](h) &= f\xi(g\eta(h)) - g\eta(f\xi(h)) \\
&= f\xi(g)\eta(h) + f\xi(\eta(h))g - g\eta(f)\xi(h) - fg\eta(\xi(h)) \\
&= fg(\xi(\eta(h))) - fg(\eta(\xi(h))) + f\xi(g)\eta(h) - g\eta(f)\xi(h) \\
&= fg[\xi,\eta](h) + f\xi(g)\eta(h) - g\eta(f)\xi(h) \\
&= (fg[\xi,\eta] + f\xi(g)\eta - g\eta(f)\xi)(h)
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$[f\xi, g\eta] = fg[\xi,\eta] + f\xi(g)\eta - g\eta(f)\xi.$$

2 Διανυσματικά πεδία κατά μήκος μιας απεικόνισης

2.1 Ορισμός. Έστω $(M,\mathcal{A})$ και $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, και $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Μια απεικόνιση $\xi : M \to TN$ λέγεται **διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της** f, αν $\xi_x \in T_{f(x)}N$, για κάθε $x \in M$. Ισοδύναμα, αν

$$\pi_N \circ \xi = f,$$

δηλ. αν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\
M \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Συμβολίζουμε το σύνολο των διανυσματικών πεδίων κατά μήκος μιας f με $\mathcal{X}(f)$.

2.2 Παρατηρήσεις. (1) Ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μιας f *δεν* είναι διανυσματικό πεδίο.

(2) Ένα διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$ είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της id_M.

2.3 Παράδειγμα. Για κάθε διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha : J \to M$, το **πεδίο ταχυτήτων της** α

$$\dot{\alpha} : J \longrightarrow TM : \dot{\alpha}(s) := T_s\alpha \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s \right) \in T_{\alpha(s)}M$$

είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της α.

Ας θεωρήσουμε ένα $\xi \in \mathcal{X}(f)$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, με $f(U) \subseteq V$, και έστω $\{y_j\}_{j=1,\dots,n}$ οι συναρτήσεις συντεταγμένων του χάρτη ψ. Τότε, για κάθε $x \in U$, είναι $\xi_x \in T_{f(x)}N$, επομένως γράφεται ως προς την κανονική βάση του $T_{f(x)}N$ που ορίζεται από τον (V, ψ) σαν

$$\xi_x = \sum_{j=1}^{n} \xi_x(y_j) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(x)} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(x)}, \tag{3}$$

όπου

$$\xi_j : U \longrightarrow \mathbb{R} : \xi_j(x) = \xi_x(y_j)$$

οι **συντεταγμένες του** ξ ως προς τον χάρτη (V, ψ).

2.4 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $\xi \in \mathcal{X}(f)$. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Το ξ είναι διαφορίσιμο.

(ii) Για κάθε ζεύγος χαρτών $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $f(U) \subseteq V$, οι συντεταγμένες ξ_j, $j = 1, \dots, n$, είναι διαφορίσιμες.

(iii) Για κάθε $x \in M$ και $g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$, έχουμε $\xi(g) \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος χαρτών $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ που δίνουν τοπική παράσταση της f, οι χάρτες (U, ϕ) και $(\pi_N^{-1}(V), \Psi)$ ορίζουν τοπική παράσταση του ξ. Πράγματι,

$$\pi_N \circ \xi(U) = f(U) \subseteq V \implies \xi(U) \subseteq \pi_N^{-1}(V).$$

Υπολογίζουμε την τοπική παράσταση

$$\Psi \circ \xi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n$$

σε ένα $h = \phi(x) \in \phi(U)$:

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \xi \circ \phi^{-1}(h) &= \Psi(\xi_x) = (\psi(\pi_N(\xi_x)),\, \bar{\psi}(\xi_x)) = (\psi(f(x)),\, \bar{\psi}(\xi_x)) = \\
&= \left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h),\, \bar{\psi}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j(x)\, \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{f(x)}\right)\right) \\
&= \left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h),\, \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x)\bar{\psi}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{f(x)}\right)\right) \\
&= \left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h),\, \sum_{j=1}^{n} (\xi_j \circ \phi^{-1})(h) \cdot e_j\right) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1},\, \xi_1 \circ \phi^{-1}, \ldots, \xi_n \circ \phi^{-1})(h)
\end{aligned}$$

Όμως οι $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ και $\xi_j \circ \phi^{-1}$ είναι οι τοπικές παραστάσεις της f και των συντεταγμένων ξ_j. Από την ανωτέρω η σχέση συμπεραίνουμε ότι (i)$\Leftrightarrow$ (ii).

Αποδεικνύουμε ότι (ii) $\Rightarrow$ (iii): Έστω $x_o \in M$ και $g \in \mathcal{C}^{\infty}_{f(x_o)}(N, \mathbb{R})$. Η g είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $B \subseteq N$ με $f(x_o) \in B$. Επειδή τα πεδία ορισμού των χαρτών του $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας του N, υπάρχει χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $f(x_o) \in V \subseteq B$. Η f είναι συνεχής, σαν διαφορίσιμη, άρα αντιστρέφει τα ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά. Επομένως, $f^{-1}(V) \subseteq M$ είναι ανοιχτό που περιέχει το x_o, άρα υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x_o \in U$ και $U \subseteq f^{-1}(V)$, δηλ. $f(U) \subseteq V$. Τότε, λόγω της ισότητας (3), το $\xi|_U$ παίρνει την μορφή

$$\xi|_U = \sum_{j=1}^{n} \xi(y_j) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \circ f\right)$$

Εφαρμόζοντας την $\xi(g)$ σε ένα $x \in U$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi(g)(x) = \xi_x(g) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \xi(y_j) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \circ f \right) \right)_x (g) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_{f(x)} (g) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \left. \frac{\partial (g \circ \psi^{-1})}{\partial u_j} \right|_{\psi \circ f(x)}
\end{aligned}$$

άρα η $\xi(g)|_U$ είναι διαφορίσιμη.

Τέλος, η συνεπαγωγή (iii) $\Rightarrow$ (ii) είναι προφανής: το (ii) είναι ειδική περίπτωση του (iii), για $g = y_j$. □

Παρατηρούμε ότι στο σύνολο $\mathcal{X}(f)$ ορίζεται πρόσθεση, αριθμητικός πολλαπλασιασμός και πολλαπλασιασμός με τις συναρτήσεις της $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, δηλ. το $\mathcal{X}(f)$ είναι $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-πρότυπο. Επιπλέον, ορίζεται και η απεικόνιση

$$\xi : \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : g \longmapsto \xi(g) \tag{4}$$

είναι $\mathbb{R}$-γραμμική και ικανοποιεί μια παραλλαγή της συνθήκης του Leibniz:

$$\xi(gh)(x) = \xi_x(gh) = g(f(x))\xi_x(h) + h(f(x))\xi_x(g), \qquad x \in M,$$

δηλ.

$$\xi(gh) = (g \circ f) \cdot \xi(h) + (h \circ f) \cdot \xi(g).$$

3 Συσχετισμένα Διανυσματικά Πεδία

Σταθεροποιούμε δύο διαφορικές πολλαπλότητες $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ διαστάσεων m και n, αντίστοιχα, και μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \to N$.

3.1 Ορισμός. Λέμε ότι το τα διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$ είναι f–**συσχετισμένα**, αν

$$Tf \circ \xi = \eta \circ f,$$

δηλαδή, αν το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] & TN \\ M \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

3.2 Παρατήρηση. Για κάθε $\xi \in \mathcal{X}(M)$, ισχύει $Tf \circ \xi \in \mathcal{X}(f)$. Ομοίως, για κάθε $\eta \in \mathcal{X}(N)$, ισχύει $\eta \circ f \in \mathcal{X}(f)$. Επομένως, τα ξ και η είναι f-συσχετισμένα, αν ορίζουν το ίδιο πεδίο κατά μήκος της f.

Θεωρώντας τα διανυσματικά πεδία σαν ολικές παραγωγήσεις, παίρνουμε μια ισοδύναμη συνθήκη, που είναι επίσης ένα χρήσιμο κριτήριο για την f-συσχέτιση.

3.3 Πρόταση. *Τα διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$ είναι f-συσχετισμένα, αν και μόνον αν, για κάθε $x \in M$ και $g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$,*

(5) $$\xi(g \circ f) = \eta(g) \circ f.$$

Απόδειξη. Ας σημειώσουμε πρώτα ότι αν $g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$, τότε $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, και κατά συνέπεια, $\xi(g \circ f) \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Από την άλλη μεριά έχουμε $\eta(g) \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$, επομένως $\eta(g) \circ f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Η ισότητα (5) είναι ισοδύναμη με

$$T_x f(\xi_x) = \eta_{f(x)} \in T_{f(x)}N, \quad \forall x \in M.$$

Θεωρώντας τα ανωτέρω εφαπτόμενα διανύσματα σαν παραγωγήσεις του $\mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$, παίρνουμε ότι η (5) είναι ισοδύναμη με την

$$T_x f(\xi_x)(g) = \eta_{f(x)}(g) \quad \forall x \in M,\ g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$$

που, με τη σειρά της, είναι ισοδύναμη με την

$$(\xi(g \circ f))(x) = (\eta(g) \circ f)(x) \quad \forall x \in M,\ g \in \mathcal{C}^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$$

αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό. □

3.4 Πόρισμα. *Έστω $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta, \eta' \in \mathcal{X}(N)$, έτσι ώστε ξ να είναι f-συσχετισμένο με το η και ξ' να είναι f-συσχετισμένο με το η'. Τότε $[\xi, \xi']$ είναι f-συσχετισμένο με το $[\eta, \eta']$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι $[\xi, \xi']$, $[\eta, \eta']$ είναι f-συσχετισμένα, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι

$$[\eta, \eta'](g) \circ f = [\xi, \xi'](g \circ f),$$

για κάθε τοπικά ορισμένη διαφορίσιμη $g : A \to \mathbb{R}$, όπου A διατρέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του N. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της αγκύλης Lie στο αριστερό μέλος της ανωτέρω ισότητας παίρνουμε

$$\begin{aligned}[\eta, \eta'](g) \circ f &= (\eta(\eta'(g)) - \eta'(\eta(g))) \circ f \\ &= \eta(\eta'(g)) \circ f - \eta'(\eta(g)) \circ f\end{aligned}$$

Επειδή ξ, η είναι f-συσχετισμένα και $\eta'(g) : A \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση στο N, έχουμε

$$\eta(\eta'(g)) \circ f = \xi(\eta'(g) \circ f).$$

Ομοια, αφού ξ', η' είναι f-συσχετισμένα και $\eta(g) : A \to \mathbb{R}$ είναι μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση στο N, έχουμε

$$\eta'(\eta(g)) \circ f = \xi'(\eta(g) \circ f).$$

Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned}[\eta, \eta'](g) \circ f &= \xi(\eta'(g) \circ f) - \xi'(\eta(g) \circ f) \\ &= \xi(\xi'(g \circ f)) - \xi'(\xi(g \circ f)) \\ &= [\xi, \xi'](g \circ f)\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.5 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν f είναι αμφιδιαφόριση, τότε η απεικόνιση*

$$f_* : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(N) : \xi \longmapsto f_*(\xi) := Tf \circ \xi \circ f^{-1}$$

είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie.

Απόδειξη. (ι) Παρατηρούμε ότι η f_* είναι καλά ορισμένη, διότι $Tf \circ \xi \circ f^{-1}$ είναι διαφορίσιμη και, για κάθε $y = f(x) \in N$,

$$Tf \circ \xi \circ f^{-1}(y) = T_x f(\xi_x) \in T_{f(x)} N = T_y N,$$

δηλαδή, $Tf \circ \xi \circ f^{-1}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο.

(ii) Η f_* είναι 1–1: Αν $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$ με $f_*(\xi) = f_*(\xi')$, τότε

$$Tf \circ \xi \circ f^{-1} = Tf \circ \xi' \circ f^{-1}.$$

Επειδή f και Tf είναι αντιστρέψιμες, παίρνουμε $\xi = \xi'$.

(iii) Η f_* είναι επί: Έστω $\eta \in \mathcal{X}(N)$ και

$$\xi := (Tf)^{-1} \circ \eta \circ f = (f^{-1})_*(\eta).$$

Τότε προφανώς, $f_*(\xi) = \eta$.

(iv) Η f_* είναι $\mathbb{R}$–γραμμική: Για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $y = f(x) \in N$, έχουμε

$$\begin{aligned} f_*(\lambda\xi + \eta)(y) &= Tf \circ (\lambda\xi + \eta) \circ f^{-1}(y) \\ &= Tf(\lambda\xi_x + \eta_x) = \lambda Tf(\xi_x) + Tf(\eta_x) \\ &= \lambda(Tf \circ \xi \circ f^{-1})(y) + (Tf \circ \eta \circ f^{-1})(y) \\ &= \lambda f_*(\xi)(y) + f_*(\eta)(y) \end{aligned}$$

(v) Η f_* διατηρεί την αγκύλη Lie, δηλαδή,

$$f_*([\xi, \xi']) = [f_*(\xi), f_*(\xi')], \tag{6}$$

για κάθε $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$. Πράγματι, η ισοδυναμία

$$f_*(\xi) = Tf \circ \xi \circ f^{-1} \Leftrightarrow f_*(\xi) \circ f = Tf \circ \xi$$

συνεπάγεται ότι $f_*(\xi)$ είναι το μοναδικό διανυσματικό πεδίο του N, που είναι f–συσχετισμένο με ξ. Άρα, για κάθε $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$, ξ είναι f–συσχετισμένο με $f_*(\xi)$ και ξ' είναι f–συσχετισμένο με $f_*(\xi')$. Λόγω του Πορίσματος 3.4, $[\xi, \xi']$ είναι f–συσχετισμένο με $[f_*(\xi), f_*(\xi')]$. Η μοναδικότητα συνεπάγεται την ζητούμενη ισότητα (6). $\square$