ΜΑΘΗΜΑ 09

1 Διανυσματικά Πεδία

Σε όλη αυτή την παράγραφο, $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα.

1.1 Ορισμός. Ένα **διανυσματικό πεδίο επί της** M είναι μια τομή της εφαπτόμενης δέσμης, δηλαδή, μια απεικόνιση $\xi : M \to TM$, τέτοια ώστε $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$.

Ισοδύναμα, ένα διανυσματικό πεδίο ξ κάνει το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

1.2 Παρατηρήσεις. (1) Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1, για ένα διανυσματικό πεδίο ξ έχουμε

$$\pi(\xi(x)) = (\pi \circ \xi)(x) = \mathrm{id}_M(x) = x,$$

για κάθε $x \in M$, δηλαδή, $\xi(x)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο x.

(2) Σαν αποτέλεσμα του (1), τα διανυσματικά πεδία είναι 1–1 απεικονίσεις.

(3) Για ευκολία, για τις τιμές ενός διανυσματικού πεδίου, συνήθως γράφουμε ξ_x αντί του $\xi(x)$.

(4) Μπορούμε να ορίζουμε διανυσματικά πεδία πάνω από οποιοδήποτε υποσύνολο A του M.

(5) Επειδή το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών ενός διανυσματικού πεδίου $\xi : M \to TM$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες, μπορεί το ξ να είναι

διαφορίσιμο. Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(M)$ το σύνολο όλων των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων επί του M. Όμοια, γράφουμε $\mathcal{X}(A)$, για το σύνολο όλων των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων των ορισμένων σε μια ανοιχτή υποπολλαπλότητα A.

(6) Έστω ξ ένα διανυσματικό πεδίο επί του M και $x_o \in M$. Για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x_o \in U$, ο (U, ϕ) και ο αντίστοιχος χάρτης $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ στην εφαπτόμενη δέσμη TM ορίζουν τοπική παράσταση του ξ στο x_o. Πράγματι, για κάθε $x \in U$,

$$\xi_x \in T_x M \subseteq \pi^{-1}(U)$$

επομένως η τοπική παράσταση

$$\Phi \circ \xi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m$$

υπάρχει.

1.3 Παραδείγματα. (1) Η απεικόνιση

$$\Omega : M \longrightarrow TM : x \longmapsto \Omega(x) := 0_x \in T_x M,$$

όπου 0_x είναι το μηδενικό διάνυσμα στον $T_x M$, είναι ένα διανυσματικό πεδίο επί του M. Για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $h = \phi(x) \in \phi(U)$, η τοπική παράσταση υπολογισμένη στο h είναι

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Omega \circ \phi^{-1}(h) &= \Phi(\Omega_x) = (\phi(\pi(0_x)),\, \bar{\phi}(0_x)) = \\ &= (\phi(x),\, 0) = (h, 0) \end{aligned}$$

δηλ. είναι διαφορίσιμη, έτσι $\Omega \in \mathcal{X}(M)$.

(2) Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Η απεικονίσεις

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \longrightarrow TU : x \longmapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

είναι διανυσματικά πεδία επί του U. Η τοπική παράσταση του $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ως προς τους (ολικούς) χάρτες (U, ϕ) και $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ (των ανοιχτών υποπολλαπλοτήτων U της M και $\pi^{-1}(U)$ της TM)

$$\begin{aligned} \Phi \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \phi^{-1}(h) &= \Phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \right) = \\ &= \left(\phi\left(\pi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \right) \right),\, \bar{\phi}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \right) \right) = \\ &= (\phi(x),\, e_i) = (h, e_i) \end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμη, δηλαδή, $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(U)$. Η απεικονίσεις (1) λέγονται **βασικά διανυσματικά πεδία** ορισμένα από τον χάρτη (U, ϕ).

Επειδή κάθε τιμή ξ_x ενός διανυσματικού πεδίου είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα, μπορεί να θεωρείται σαν παραγώγιση του $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Έτσι, αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, με πεδίο ορισμού μια ανοιχτή περιοχή A του x, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\xi(f) : A \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \xi(f)(x) := \xi_x(f). \tag{2}$$

Ιδιαιτέρως, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, εφαρμόζοντας το ξ στις συντεταγμένες x_i, $i = 1, \ldots, m$, παίρνουμε

$$\xi_i := \xi(x_i) : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \xi_x(x_i). \tag{3}$$

Η απεικονίσεις (3) λέγονται **συντεταγμένες του ξ ως προς τον χάρτη** (U, ϕ).

Από την άλλη μεριά, κάθε ξ_x παίρνει την μορφή

$$\xi_x = \sum_i \xi_x(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x = (\sum_i \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i})(x)$$

για κάθε $x \in U$, επομένως

$$\xi|_U = \sum_i \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Το επόμενο θεώρημα παρέχει ένα κριτήριο για τη διαφορισιμότητα ενός διανυσματικού πεδίου.

1.4 Θεώρημα. *Έστω $\xi : M \to TM$ ένα διανυσματικό πεδίο. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Το ξ είναι διαφορίσιμο.

(ii) Για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, οι συντεταγμένες ξ_i, $i = 1, \ldots, m$, είναι διαφορίσιμες.

(iii) Για κάθε $x \in M$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, έχουμε $\xi(f) \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (4), υπολογίζουμε την τοπική παράσταση του ξ ως προς τους (U, ϕ) και $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ στο $h \in \phi(U)$:

αν $\phi^{-1}(h) = x$, τότε

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \xi \circ \phi^{-1}(h) &= \Phi(\xi_x) = (\phi(\pi(\xi_x)),\, \bar{\phi}(\xi_x)) \\
&= (\phi(x),\, \bar{\phi}(\xi_x)) = \\
&= \left(h,\, \bar{\phi} \left(\sum_i \xi_i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x \right) \right) \\
&= \left(h,\, \sum_i \xi_i(x) \bar{\phi} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x \right) \right) \\
&= \left(h,\, \sum_i \xi_i(x) e_i \right) \\
&= (h,\, \xi_1 \circ \phi^{-1}(h), \ldots, \xi_m \circ \phi^{-1}(h))
\end{aligned}$$

Όμως οι $\xi_i \circ \phi^{-1}$ είναι οι τοπικές παραστάσεις των συντεταγμένων ξ_i. Από την ανωτέρω η σχέση συμπεραίνουμε ότι (i)$\Leftrightarrow$ (ii).

Αποδεικνύουμε ότι (ii) $\Rightarrow$ (iii): Έστω $x_o \in M$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Τότε $f : A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $A \subseteq M$ και $x_o \in A$. Υπάρχει χάρτης $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x_o \in U \subseteq A$. Για κάθε $x \in U$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi(f)(x) = \xi_x(f) &= \left(\sum_i \xi_i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x \right)(f) \\
&= \sum_i \xi_i(x) \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x \\
&= \sum_i \xi_i(x) \left. \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i} \right|_{\phi(x)}
\end{aligned}$$

δηλαδή, $\xi(f)|_U$ είναι ένα άθροισμα γινομένων από διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Τέλος, η συνεπαγωγή (iii) $\Rightarrow$ (ii) είναι προφανής: το (ii) είναι ειδική περίπτωση του (iii), για $f = x_i$. $\square$

1.5 Παρατήρηση. Η συνθήκη (ii) του προηγούμενου θεωρήματος παρέχει έναν εύκολο τρόπο να αποδείξουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο είναι διαφορίσιμο: Για παράδειγμα, το μηδενικό διανυσματικό πεδίο

$$\Omega = \sum_i 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

είναι διαφορίσιμο, αφού οι συντεταγμένες του είναι σταθερά μηδενικές. Επίσης, για κάθε χάρτη (U,ϕ), το βασικό διανυσματικό πεδίο

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}$$

έχει σταθερές συντεταγμένες.

1.6 Πρόταση. *Το σύνολο $\mathcal{X}(M)$ είναι ένα πραγματικός διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Ορίζουμε πράξεις

$$\begin{gathered} \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ \mathbb{R} \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) \end{gathered}$$

κατά σημείο, δηλαδή, για κάθε ξ, $\eta \in \mathcal{X}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in M$, θέτουμε

$$\begin{gathered} (\xi + \eta)_x := \xi_x + \eta_x, \\ (\lambda\xi)_x := \lambda\xi_x. \end{gathered}$$

Οι απεικονίσεις $\xi + \eta$ και $\lambda \cdot \xi$ είναι διανυσματικά πεδία. Ακόμη, είναι διαφορίσιμες. Πράγματι, για κάθε χάρτη (U,ϕ) επί του M, οι συντεταγμένες τους δίνονται από

$$\begin{gathered} (\xi + \eta)_i = (\xi + \eta)(x_i) = \xi(x_i) + \eta(x_i) = \xi_i + \eta_i \\ (\lambda\xi)_i = (\lambda\xi)(x_i) = \lambda\xi(x_i) = \lambda\xi_i \end{gathered}$$

επομένως, είναι διαφορίσιμες. Τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου προφανώς ικανοποιούνται. □

Το σύνολο $\mathcal{X}(M)$ έχει μια πρόσθετη δομή: Θέτουμε

$$\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) := \{f : M \to \mathbb{R} : \text{διαφορίσιμη}\}.$$

Το $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ με τις (κατά σημείο) πράξεις που δίνονται από τις ισότητες

$$\begin{aligned} &(f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ &(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \\ &(fg)(x) = f(x)g(x) \end{aligned}$$

για κάθε $x \in M$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι μια *πραγματική μεταθετική άλγεβρα με μονάδα.*

Για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ και $\xi \in \mathcal{X}(M)$, ορίζουμε

$$f\xi : M \longrightarrow TM : x \longmapsto f(x)\xi_x.$$

Προφανώς, $f\xi$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο και οι συντεταγμένες ως προς ένα χάρτη (U,ϕ) σε ένα σημείο $x \in U$, δίνονται από

$$(f\xi)_i(x) = (f(x)\xi_x)(x_i) = f(x)\xi_x(x_i) = f(x)\xi_i(x) = (f\xi_i)(x)$$

ή αλλιώς

$$(f\xi)_i = f\xi_i,$$

δηλαδή, είναι διαφορίσιμες. Σαν αποτέλεσμα, υπάρχει ένας πολλαπλασιασμός

$$\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (\alpha,\xi) \longmapsto \alpha\xi.$$

Είναι άμεσο να αποδείξουμε την επόμενη

1.7 Πρόταση. *$\mathcal{X}(M)$ είναι ένα $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$-πρότυπο.*

2 Τα διανυσματικά πεδία σαν παραγωγίσεις

Έστω $(M,\mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Θεωρούμε πάλι την άλγεβρα $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ των (ολικά ορισμένων) διαφορίσιμων συναρτήσεων του M.

Σύμφωνα με την καθιερωμένη ορολογία, κάθε $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση

$$\delta : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$$

που ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz:

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g),$$

για κάθε $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, ονομάζεται **παραγώγιση** της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.

Απλοί υπολογισμοί μας δίνουν την επόμενη

2.1 Πρόταση. *Το σύνολο $\mathcal{D}(M)$ όλων των παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ είναι ένα $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$-πρότυπο.*

Έστω τώρα $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Αφήνοντας την συνάρτηση f να διατρέχει την άλγεβρα $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ παίρνουμε μια απεικόνιση

$$\xi : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) : f \longmapsto \xi(f). \tag{5}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}\xi(\lambda f + g)(x) &= \lambda \xi_x(f) + \xi_x(g) = \lambda \xi(f)(x) + \xi(g)(x) \\ &= (\lambda \xi(f) + \xi(g))(x)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\xi(fg)(x) &= \xi_x(fg) = \xi_x(f)g(x) + f(x)\xi_x(g) \\ &= \xi(f)(x)g(x) + f(x)\xi(g)(x) \\ &= (\xi(f)g + f\xi(g))(x),\end{aligned}$$

για κάθε $x \in M$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\xi(\lambda f + g) &= \lambda \xi(f) + \xi(g) \\ \xi(fg) &= \xi(f)g + f\xi(g),\end{aligned}$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η (5) είναι $\mathbb{R}$–γραμμική και ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz. Επομένως, έχουμε την επόμενη

2.2 Πρόταση. *Κάθε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$ ορίζει μια παραγώγιση της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.* □

Ανάλογα με την ταύτιση των σημειακών παραγωγίσεων με τα εφαπτόμενα διανύσματα, έχουμε και την ταύτιση των παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ με τα διανυσματικά πεδία. Για να το αποδείξουμε αυτό, χρειαζόμαστε τα επόμενα βοηθητικά λήμματα.

2.3 Λήμμα. *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $0 < a < b$ στο $\mathbb{R}$, υπάρχει διαφορίσιμη $\lambda : \mathbb{R}^m \to [0, 1]$ με $\lambda(h) = 1$, αν $\|h\| \leq a$ και $\lambda(h) = 0$, αν $\|h\| \geq b$.* □

2.4 Λήμμα. *Για κάθε χάρτη (U, ϕ) και κάθε $x_o \in U$, υπάρχουν ανοιχτά $W \subsetneqq V \subsetneqq U$ με $x_o \in W$ και διαφορίσιμη $\rho : M \to [0, 1]$ με $\rho(x) = 1$, αν $x \in W$ και $\rho(x) = 0$, αν $x \notin V$.* □

2.5 Λήμμα. *Για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ με πεδίο ορισμού μια ανοιχτή περιοχή A του x, υπάρχουν ένα ανοιχτό $B \subsetneqq A$ με $x \in B$ και μια $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ με $f|_B = \tilde{f}|_B$.* □

2.6 Λήμμα. *Έστω δ μια παραγώγιση της $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Τότε, για κάθε $x \in M$, η απεικόνιση*

$$\delta_x : \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R}) : \delta_x(f) = \delta(\tilde{f})(x)$$

είναι σημειακή παραγώγιση του $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το επόμενο

2.7 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Τότε $\mathcal{X}(M)$ και $\mathcal{D}(M)$ είναι ισόμορφα $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-πρότυπα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Delta : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M) : \xi \longmapsto \delta_\xi,$$

όπου $\delta_\xi \equiv \xi$ είναι η παραγώγιση (2).

(1) *Η Δ είναι $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-γραμμική:* Έστω $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\Delta(f\xi + \eta) = f\Delta(\xi) + \Delta(\eta).$$

Επειδή τα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας είναι παραγωγίσεις της $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, ισχύει

$$[\Delta(f\xi + \eta)](h) = [f\Delta(\xi) + \Delta(\eta)](h) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Πράγματι, για κάθε $x \in M$, είναι

$$\begin{aligned}
[\Delta(f\xi + \eta)](h)(x) &= (f\xi + \eta)_x(h) = (f(x)\xi_x + \eta_x)(h) \\
&= f(x)\xi_x(h) + \eta_x(h) = f(x)\Delta(\xi)(h)(x) + \Delta(\eta)(h)(x) \\
&= [f\Delta(\xi)(h) + \Delta(\eta)(h)](x) \\
&= [f\Delta(\xi) + \Delta(\eta)](h)(x)
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

(2) *Η Δ είναι 1-1:* Έστω $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ με $\Delta(\xi) = \Delta(\eta)$. Για να δείξουμε ότι $\xi = \eta$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in M$, $\xi_x = \eta_x \in T_xM$. Προς τούτο, θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, και θα δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των ξ_x και η_x ως προς την κανονική βάση που ορίζει ο (U, ϕ) είναι ίσες. Αρκεί δηλ. να δείξουμε ότι $\xi_x(x_i) = \eta_x(x_i)$. Από το Λήμμα 2.5, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, υπάρχει ένα ανοιχτό $B_i \subseteq U$ με $x \in B_i$ και μια διαφορίσιμη $\widetilde{x_i} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, με $x_i|_B = \widetilde{x_i}|_B$. Επειδή $\widetilde{x_i} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, από την υπόθεση $\xi(\widetilde{x_i}) = \eta(\widetilde{x_i}) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Εφαρμόζοντας στο x, παίρνουμε $\xi_x(\widetilde{x_i}) = \eta_x(\widetilde{x_i}i)$. Η τοπική σύμπτωση των $\widetilde{x_i}$ με τις συντεταγμένες x_i, μας δίνει

$$\xi_x(x_i) = \xi_x(\widetilde{x_i}) = \eta_x(\widetilde{x_i}) = \eta_x(x_i)$$

απ' όπου προκύπτει η ισότητα των διανυσμάτων $\xi_x = \eta_x$.

(3) *Η Δ είναι επί:* Έστω μια παραγώγιση $\delta \in \mathcal{D}(M)$. Για κάθε $x \in M$, ορίζεται η σημειακή παραγώγιση $\delta_x : \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα $u_x \in T_xM$. Η απεικόνιση $\xi : M \to TM$ με $\xi(x) = u_x \in T_xM$, για κάθε $x \in M$, είναι διανυσματικό πεδίο. Για να δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμο, αρκεί να δείξουμε ότι έχει διαφορίσιμες συντεταγμένες. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και ένα $x_o \in U$. Θα δείξουμε ότι οι $\xi_i = \xi(x_i)$ είναι διαφορίσιμες σε μια περιοχή του x_o. Όπως στο (2), θεωρούμε τα ανοιχτά $B_i \subseteq U$ και τις ολικά ορισμένες συναρτήσεις $\widetilde{x_i}$ και παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in B_i$,

$$\xi_i(x) = \xi_x(x_i) = u_x(x_i) = u_x(\widetilde{x_i}) = \delta(\widetilde{x_i})(x),$$

δηλ

$$\xi_i|_{B_i} = \delta(\widetilde{x_i})|_{B_i},$$

που είναι διαφορίσιμη. □