ΜΑΘΗΜΑ 03

1 Η κανονική τοπολογία μιας πολλαπλότητας

Θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε πολλαπλότητα είναι τοπολογικός χώρος και τότε θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της τοπολογίας της. Για το ορισμό μιας τοπολογίας χρειαζόμαστε μόνον την ύπαρξη ενός τοπολογικού άτλαντα, έτσι, σε όλη αυτή την παράγραφο, *οι θεωρούμενες πολλαπλότητες είναι τοπολογικές.*

1.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ ένας m-διάστατος τοπολογικός άτλαντας επί του M (όχι κατ' ανάγκη μέγιστος). Ένα υποσύνολο A του M θα λέγεται **ανοιχτό** αν, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, το σύνολο $\phi(U \cap A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Αν $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι το σύνολο όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του M που ορίζονται από τον $\mathcal{A}$, ως ανωτέρω, τότε ισχύει η επόμενη πρόταση.

1.2 Πρόταση. *Το σύνολο $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι μια τοπολογία επί του M.*

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει $\emptyset \in \tau_{\mathcal{A}}$. Ακόμη, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$,

$$\phi(M \cap U) = \phi(U)$$

είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, από τον ορισμό του χάρτη, που αποδεικνύει ότι $M \in \tau_{\mathcal{A}}$.

Έστω τώρα $A, B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Θα δείξουμε ότι $A \cap B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Πράγματι, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$

$$\phi((A \cap B) \cap U) = \phi((A \cap U) \cap (B \cap U)) = \phi(A \cap U) \cap \phi(B \cap U).$$

Επειδή $\phi(A \cap U)$, $\phi(B \cap U)$ είναι ανοιχτά στο $\mathbb{R}^m$, το $\phi((A \cap B) \cap U)$ είναι ανοιχτό, σαν τομή ανοιχτών του $\mathbb{R}^m$.

Έστω τέλος $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια, με $A_i \in \tau_{\mathcal{A}}$, για κάθε $i \in I$. Θα δείξουμε ότι $A := \cup_{i \in I} A_i \in \tau_{\mathcal{A}}$. Πράγματι, για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$,

$$A \cap U = (\cup_{i \in I} A_i) \cap U = \cup_{i \in I}(A_i \cap U),$$

επομένως
$$\phi(A \cap U) = \phi((\cup_{i\in I} A_i) \cap U) = \cup_{i\in I}\phi(A_i \cap U)$$
είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, σαν ένωση ανοιχτών, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

1.3 Πρόταση. *Αν $\mathcal{A}$ είναι ένας m-διάστατος τοπολογικός άτλαντας επί του M και $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι η τοπολογία που ορίζεται από τον $\mathcal{A}$, τότε, για κάθε χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, έχουμε:*

i) $U \in \tau_{\mathcal{A}}$.

ii) Η απεικόνιση $\phi : U \to \phi(U)$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Για κάθε $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών του $\mathcal{A}$, $\psi(V \cap U)$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^m$, επομένως η i) ισχύει.

Όσον αφορά στην ii), πρέπει να δείξουμε ότι οι ϕ, ϕ^{-1} είναι συνεχείς. Σημειώνουμε ότι τα σύνολα U, $\phi(U)$ είναι τοπολογικοί χώροι με τη σχετική τοπολογία που ορίζεται από την τοπολογία των M, $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Επομένως, (βλ. Παράρτημα Β) ένα σύνολο A είναι ανοιχτό για την σχετική τοπολογία του U, αν και μόνον αν είναι ανοιχτό στην $\tau_{\mathcal{A}}$ και $A \subseteq U$, και ένα σύνολο B είναι ανοιχτό για την σχετική τοπολογία του $\phi(U)$, αν και μόνον αν είναι ανοιχτό στην (συνήθη) τοπολογία του $\mathbb{R}^m$ και $B \subseteq \phi(U)$.

Για την συνέχεια της ϕ: Έστω B ένα τυχαίο ανοιχτό υποσύνολο του $\phi(U)$ (επομένως του $\mathbb{R}^m$). Θα δείξουμε ότι $\phi^{-1}(B)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του U (επομένως του M). Έστω $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Τότε, αφού $\phi^{-1}(B) \subseteq U$, είναι

$$\begin{aligned} \psi(\phi^{-1}(B) \cap V) &= \psi(\phi^{-1}(B) \cap U \cap V) \\ &= \psi \circ \phi^{-1} \circ \phi(\phi^{-1}(B) \cap U \cap V) \\ &= (\psi \circ \phi^{-1})(B \cap \phi(U \cap V)). \end{aligned} \tag{1}$$

Λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών (U, ϕ) και (V, ψ), το $\phi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$ και το $B \cap \phi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό σαν τομή ανοιχτών. Επειδή η $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός, μεταφέρει το ανοιχτό σύνολο $B \cap \phi(U \cap V)$ στο ανοιχτό σύνολο $(\psi \circ \phi^{-1})(B \cap \phi(U \cap V))$, άρα το σύνολο (1) είναι ανοιχτό στον R^m, που συνεπάγεται ότι το $\phi^{-1}(B)$ είναι ανοιχτό στην $\tau_{\mathcal{A}}$.

Για τη συνέχεια της $\phi^{-1} : \phi(U) \to U$, αρκεί να δείξουμε ότι, αν A είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του U, τότε $(\phi^{-1})^{-1}(A) = \phi(A)$ είναι ανοιχτό στο $\phi(U)$. Πράγματι, αν A είναι ανοιχτό στο U, είναι επίσης ανοιχτό στο M, επομένως σύμφωνα με το ορισμό της $\tau_{\mathcal{A}}$, η εικόνα $\phi(A) = \phi(A \cap U)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, επομένως επίσης και του $\phi(U)$. □

1.4 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας επί ενός συνόλου M και $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Τότε, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap A \neq \emptyset$, το ζεύγος $(U \cap A, \phi|_{U\cap A})$ είναι ένας χάρτης του M που ανήκει στον $\mathcal{A}^*$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap A \neq \emptyset$. Τότε $\phi|_{U\cap A}$ είναι 1–1 σαν περιορισμός μιας 1–1 απεικόνισης και $\phi(U \cap A)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, αφού $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Δηλαδή, $(U \cap A, \phi|_{U\cap A})$ είναι χάρτης του M.

Για να δείξουμε ότι $(U \cap A, \phi|_{U\cap A}) \in \mathcal{A}^*$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ είναι τοπολογικά συμβιβστός με τον $(U \cap A, \phi|_{U\cap A})$. Πράγματι, για $U \cap V \cap A \neq \emptyset$, έχουμε ότι $U \cap V \cap A \subseteq U \cap V$ είναι ανοιχτό, σαν τομή τριών ανοιχτών, επομένως οι ομοιομορφισμοί $\phi : U \to \phi(U)$ και $\psi : V \to \psi(V)$ το στέλνουν στα ανοιχτά υποσύνολα $\phi(U \cap V \cap A)$ και $\psi(U \cap V \cap A)$ του $\mathbb{R}^m$. Μένει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\psi \circ (\phi|_{U\cap A})^{-1}$ και $(\phi|_{U\cap A}) \circ \psi^{-1}$ είναι ομοιομορφισμοί. Όμως, λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, οι απεικονίσεις μεταφοράς $\psi \circ \phi^{-1}$ και $\phi \circ \psi^{-1}$ είναι ομοιομορφισμοί. Άρα

$$\psi \circ (\phi|_{U\cap A})^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(U\cap V\cap A)}$$

και

$$\phi|_{(U\cap A)} \circ \psi^{-1} = (\phi \circ \psi^{-1})|_{\psi(U\cap V\cap A)}$$

είναι ομοιομορφισμοί σαν περιορισμοί ομοιομορφισμών. □

1.5 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας τοπολογικός άτλαντας επί του M και $\mathcal{A}^*$ ο αντίστοιχος μέγιστος. Τότε τα πεδία ορισμού των χαρτών του $\mathcal{A}^*$ ορίζουν μια βάση για την τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $A \in \tau_{\mathcal{A}}$ και $x \in A$, υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}^*$ με $x \in U \subseteq A$. Πράγματι, αφού οι χάρτες του $\mathcal{A}$ καλύπτουν το M, υπάρχει $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, με $x \in V$. Θέτοντας $U := V \cap A$, $\phi := \psi|_U$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

1.6 Ορισμός. Η τοπολογία που ορίζεται επί μιας πολλαπλότητας από ένα μέγιστο άτλαντα ονομάζεται **κανονική** τοπολογία της πολλαπλότητας.

Σε όλα τα επόμενα, όταν αναφερόμαστε στην τοπολογία μιας πολλαπλότητας $(M, \mathcal{A})$, θα εννοούμε την κανονική τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η ανωτέρω τοπολογία μπορεί να οριστεί από οποιονδήποτε άτλαντα περιέχεται στον δεδομένο μέγιστο.

1.7 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας του M και έστω $\mathcal{A}^*$ ο μοναδικός μέγιστος άτλαντας που περιέχει τον $\mathcal{A}$. Συμβολίζουμε με $\tau_{\mathcal{A}}$ και $\tau_{\mathcal{A}^*}$ τις αντίστοιχες τοπολογίες επί του M. Τότε $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}^*}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι οι δύο τοπολογίες έχουν την ίδια βάση. Πράγματι, από την Πρόταση 1.5, η $\tau_{\mathcal{A}}$ έχει βάση που αποτελείται από τα πεδία ορισμού των χαρτών του $\mathcal{A}^*$. Παρόμοια, η $\tau_{\mathcal{A}^*}$ έχει βάση που αποτελείται από τα πεδία ορισμού των χαρτών του $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^*$. □

Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, δύο τοπολογικά συμβιβαστοί άτλαντες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ έχουν τον ίδιο μέγιστο $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$, άρα ορίζουν επί του M την ίδια τοπολογία. Πράγματι,

$$\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}^*} = \tau_{\mathcal{B}^*} = \tau_{\mathcal{B}}.$$

Το αντίστροφο ισχύει επίσης:

1.8 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ άτλαντες επί του M, που ορίζουν επί του M την ίδια τοπολογία τ. Τότε $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ είναι τοπολογικά συμβιβαστοί.*

Απόδειξη. Έστω $(U,\phi) \in \mathcal{A}$, $(V,\psi) \in \mathcal{B}$. Τότε $U \cap V \in \tau$ και $\phi|_{U\cap V}$, $\psi|_{U\cap V}$ είναι ομοιομορφισμοί. Άρα $\phi(U \cap V), \psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά σαν εικόνες ανοιχτών συνόλων μέσω ομοιομορφισμών και $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός σαν σύνθεση ομοιομορφισμών. □

Συνδυάζοντας τα ανωτέρω αποτελέσματα, παίρνουμε το επόμενο

1.9 Θεώρημα. *Οι άτλαντες $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ επί του M είναι τοπολογικά συμβιβαστοί, αν και μόνον αν ορίζουν την ίδια τοπολογία επί του M.* □

Σε μερικές περιπτώσεις, εκτός από την κανονική τοπολογία, μια πολλαπλότητα M μπορεί επίσης να έχει μια άλλη τοπολογία τ (π.χ. η σφαίρα S^2 έχει τη σχετική τοπολογία, σαν υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$). Στην επόμενη πρόταση συγκρίνουμε τις δύο τοπολογίες $\tau_{\mathcal{A}}$ και τ.

1.10 Πρόταση. *Έστω (M,τ) ένας τοπολογικός χώρος, εφοδιασμένος με έναν άτλαντα $\mathcal{A}$. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

i) $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

ii) Για κάθε $(U,\phi) \in \mathcal{A}$, ισχύει ότι $U \in \tau$ και $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ομοιομορφισμός ως προς την τ (όπου U έχει τη σχετική τοπολογία σαν ανοιχτό υποσύνολο του τοπολογικού χώρου (M,τ), και το $\phi(U)$ έχει την σχετική τοπολογία σαν ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$).

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $i) \Rightarrow ii)$ είναι γνωστή από την Πρόταση 1.3. Αποδεικνύουμε το αντίστροφο.

Έστω $A \in \tau$. Θα αποδείξουμε ότι $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Θεωρούμε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Επειδή $U \in \tau$, παίρνουμε ότι $U \cap A \in \tau$, δηλαδή $U \cap A$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του U (ως προς τ). Επομένως, ο ομοιομορφισμός (ως προς τ) ϕ στέλνει το $U \cap A$ σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\phi(U)$, το οποίο, με τη σειρά του, είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, σαν εικόνα χάρτη. Άρα, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι $\phi(U \cap A) \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτό. Δηλαδή (βλ. Ορισμό 1.1), $A \in \tau_{\mathcal{A}}$ και $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{A}}$.

Αντίστροφα, έστω $B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Θα δείξουμε ότι $B \in \tau$. Θεωρούμε και $x \in B$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Από την υπόθεση, $U \in \tau$. Επειδή $B \in \tau_{\mathcal{A}}$, από τον ορισμό της $\tau_{\mathcal{A}}$, $\phi(B \cap U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, επομένως και του $\phi(U)$. Συνεπώς, ο ομοιομορφισμός ϕ^{-1} στέλνει το ανοιχτό υποσύνολο $\phi(B \cap U)$ του $\phi(U)$ στο ανοιχτό $B \cap U$ του U (ως προς τ). Έτσι έχουμε αποδείξει ότι, για κάθε $B \in \tau_{\mathcal{A}}$ και κάθε $x \in B$, υπάρχει $U \cap B \in \tau$ με $x \in U \cap B \subseteq B$. Άρα $B \in \tau$ και $\tau_{\mathcal{A}} \subseteq \tau$. □

Μια πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$, εφοδιασμένη με την κανονική τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$, πάντοτε έχει ορισμένες τοπολογικές ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα:

1.11 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας επί του M. Τότε $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ είναι ένας T_1-χώρος, τοπικά συμπαγής, τοπικά συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ είναι T_1: Έστω $x, y \in M$ με $x \neq y$. Υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Αν $y \notin U$, τότε $U \in \tau_{\mathcal{A}}$ είναι η ζητούμενη περιοχή. Αν $y \in U$, θεωρούμε το σημεία $\phi(x) \neq \phi(y) \in \phi(U)$. Επειδή ο χώρος $\mathbb{R}^m$ (και ο $\phi(U)$) είναι T_1, υπάρχει ένα ανοιχτό $A \subseteq \phi(U)$, με $\phi(x) \in A$ και $\phi(y) \notin A$. Τότε $\phi^{-1}(A)$ είναι η ζητούμενη περιοχή.

Αποδεικνύουμε τώρα τις άλλες ιδιότητες: Έστω $x \in M$ και A ανοιχτή περιοχή του x. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε $x \in U \cap A$ και $\phi(U \cap A)$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\phi(x)$ στον $\mathbb{R}^m$. Επομένως, υπάρχει $\varepsilon > 0$, με

$$\phi(x) \in \widehat{B}(\phi(x), \varepsilon/2) \subseteq B(\phi(x), \varepsilon) \subseteq \phi(U \cap A).$$

Παρατηρούμε ότι η κλειστή μπάλα $\widehat{B}(\phi(x), \varepsilon/2)$ είναι μια συμπαγής, συνεκτική και κατά τόξα συνεκτική περιοχή του $\phi(x)$. Επειδή οι ομοιομορφισμοί διατηρούν τις προηγούμενες ιδιότητες, $\phi^{-1}(\widehat{B}(\phi(x), \varepsilon/2)) \subseteq U \cap A \subseteq A$ είναι η ζητούμενη συμπαγής, συνεκτική και κατά τόξα συνεκτική περιοχή του x. □

Οι προηγούμενες ιδιότητες της κανονικής τοπολογίας είναι τοπικές, δηλαδή αναφέρονται στις περιοχές ενός τυχαίου σημείου. Οι ισχυρότερες ιδιότητες (Hausdorff, συμπάγεια, συνεκτικότητα και κατά τόξα συνεκτικότητα) δεν εξασφαλίζονται σε μια πολλαπλότητα, όπως μπορεί κανείς να δει στα επόμενα Παραδείγματα.

1.12 Παραδείγματα.

(Α) Η κανονική τοπολογία του $(\mathbb{R}^m, \mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})\})$ είναι η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}^m$, που τον κάνει **μιά Hausdorff, συνεκτική και κατά τόξα συνεκτική, μη συμπαγή πολλαπλότητα.**

(Β) Η κανονική τοπολογία που ορίζεται στην μοναδιαία σφαίρα από τον άτλαντα των στερεογραφικών προβολών (ή αυτόν των ημισφαιρίων) είναι η σχετική τοπολογία που ορίζεται από συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^m$, και κάνει την S^2 μιά **Hausdorff, συνεκτική και κατά τόξα συνεκτική, συμπαγή πολλαπλότητα**.

(Γ) Οποιαδήποτε μη τεμνόμενα ανοιχτά $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ έχουν ένωση $A \cup B$ που είναι πολλαπαπλότητα, με άτλαντα αποτελούμενο από τον ολικό χάρτη $(A \cup B, \mathrm{id}_{A\cup B})$. Η κανονική της τοπολογία, που συμπίπτει με την σχετική τοπολογία, κάνει την $A \cup B$ μια **Hausdorff, μη συμπαγή, μη συνεκτική και μη κατά τόξα συνεκτική πολλαπλότητα.**

Μια ιδιαίτερη περίπτωση είναι ο χώρος $GL(n, \mathbb{R})$: Θεωρούμε το χώρο $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πραγματικών πινάκων, που συμπίπτει με τον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n^2}$ μέσω του γραμμικού ισομορφισμού

$$\Phi : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2},$$

που στέλνει κάθε πίνακα $A = (a_{ij})$ στο διάνυσμα της μορφής

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}).$$

Το ζεύγος $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\, \Phi)$ είναι ολικός χάρτης του $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \to \det(A)$$

είναι συνεχής, επομένως η **γενική γραμμική ομάδα**

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_*),$$

δηλαδή, το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων, είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$. Επομένως, το ζεύγος $(GL(n, \mathbb{R}),\, \Phi|_{GL(n,\mathbb{R})})$ είναι ένας n^2–διάστατος (ολικός) χάρτης του $GL(n, \mathbb{R})$, και

$$\mathcal{A} = \{(GL(n, \mathbb{R}),\, \Phi|_{GL(n,\mathbb{R})})\}$$

είναι ένας n^2-διάστατος διαφορικός άτλαντας. Θεωρούμε την $GL(n,\mathbb{R})$ εφοδιασμένη με τον αντίστοιχο μέγιστο άτλαντα. Ορίζουμε τα επόμενα υποσύνολα του $GL(n,\mathbb{R})$:

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det(A) > 0\},$$
$$GL^-(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det(A) < 0\}.$$

Προφανώς,

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(0,+\infty) \subseteq GL(n,\mathbb{R}),$$
$$GL^-(n,\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(-\infty,0) \subseteq GL(n,\mathbb{R})$$

είναι ανοιχτά και
$$GL^+(n,\mathbb{R}) \cap GL^-(n,\mathbb{R}) = \emptyset.$$

Επομένως η $GL(n,\mathbb{R})$ καλύπτεται από δύο ανοιχτά, μη κενά, ξένα σύνολα. Δηλαδή, δεν είναι συνεκτικός χώρος. Πιό συγκεκριμένα, έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, τις $GL^+(n,\mathbb{R})$ και $GL^-(n,\mathbb{R})$.

(Δ) **Μιά μη–Hausdorff πολλαπλότητα** (Reeb-Haefliger, 1957): Θεωρούμε το σύνολο
$$M := \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\}.$$

Ορίζουμε τα ζεύγη (U_1,ϕ_1) και (U_2,ϕ_2) με:

$$U_1 := \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \phi_1 := pr_1|U_1 : U_1 \to \mathbb{R},$$
$$U_2 := \{(t,0) : t \in \mathbb{R}_*\} \cup \{(0,1)\}, \quad \phi_2 := pr_1|U_2 : U_2 \to \mathbb{R},$$

όπου $pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη. Προφανώς, ϕ_1, ϕ_2 είναι 1–1 απεικονίσεις με $\phi_1(U_1) = \phi_2(U_2) = \mathbb{R}$.

Άρα είναι χάρτες που καλύπτουν M. Ακόμη είναι διαφορικά συμβιβαστοί: Πράγματι, $U_1 \cap U_2 = \{(t,0) : t \in \mathbb{R}_*\}$, επομένως

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}_* \subseteq \mathbb{R} \text{ (ανοιχτό)}.$$

Η απεικόνιση μεταφοράς

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} = id_{\mathbb{R}_*},$$

είναι μια $\mathcal{C}^\infty$–απεικόνιση. Σαν αποτέλεσμα, $\mathcal{A} = \{(U_1,\phi_1), (U_2,\phi_2)\}$ είναι ένας άτλαντας επί του M και $(M,\mathcal{A}^*)$ είναι μια διαφορική πολλαπλότητα.

Όμως ο τοπολογικός χώρος $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ δεν είναι Hausdorff. Για να δείξουμε αυτό τον ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία στο M, που δεν έχουν μη τεμνόμενες ανοιχτές περιοχές. Πράγματι, θεωρούμε τα σημεία (0,0) και (0,1) και τυχαίες ανοιχτές (ως προς $\tau_{\mathcal{A}}$) περιοχές τους, A και B, αντίστοιχα. Τότε, σύμφωνα με το ορισμό της $\tau_{\mathcal{A}}$, $\phi_1(A \cap U_1)$ και $\phi_2(B \cap U_2)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Επειδή $(0,0) \in A \cap U_1$ και $(0,1) \in B \cap U_2$, συμπεραίνουμε ότι $0 = \phi_1(0,0) = \phi_2(0,1) \in \phi_1(A \cap U_1) \cap \phi_2(B \cap U_2)$, που είναι ένα ανοιχτό, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έτσι περιέχει κάποιο $t_o \neq 0$. Παρατηρούμε ότι $\phi_1(t_o, 0) = t_o \in \phi_1(A \cap U_1)$, άρα $(t_o, 0) \in A \cap U_1$. Ομοια $(t_o, 0) \in B \cap U_2$, άρα $(t_o, 0) \in A \cap B$. Δηλαδή, έχουμε αποδείξει ότι κάθε ζεύγος ανοιχτών περιοχών των (0,0) και (0,1) τέμνεται, επομένως το M δεν είναι χώρος Hausdorff.

Δίνουμε τώρα μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για τους χάρτες μιας πολλαπλότητας που εξασφαλίζει ότι ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος είναι Hausdorff.

1.14 Πρόταση. *Μια πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$ είναι χώρος Hausdorff, αν και μόνον αν, για κάθε $x \neq y \in M$, υπάρχουν (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, τέτοιοι ώστε:*

$$x \in U,\ y \in V \ \text{ και } \ U \cap V = \emptyset.$$

Απόδειξη. Αν υπάρχουν τέτοιοι χάρτες, προφανώς το M είναι χώρος Hausdorff. Αντίστροφα, έστω M Hausdorff. Τότε, υπάρχουν ανοιχτά σύνολα A και B, με $x \in A, y \in B$ και $A \cap B = \emptyset$. Επειδή τα πεδία ορισμού των χαρτών ενός μέγιστου άτλαντα είναι βάση για την κανονική τοπολογία (βλ. Πρόταση 1.5) υπάρχουν χάρτες (U, ϕ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, με $x \in U \subseteq A$ και $y \in V \subseteq B$. Προφανώς $U \cap V = \emptyset$. □

Η συμπάγεια συνεπάγεται περιορισμούς στον άτλαντα μιας πολλαπλότητας, όπως μπορούμε να δούμε στην επόμενη

1.15 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας επί του M, τέτοιος ώστε $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ να είναι συμπαγής χώρος. Τότε ο $\mathcal{A}$ έχει τουλάχιστον δύο χάρτες.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνον ένας (ολικός) χάρτης (M, ϕ). Τότε $\phi(M)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^m$ (από τον ορισμό του χάρτη)· είναι επίσης συμπαγές (σαν εικόνα του συμπαγούς M μέσω της συνεχούς ϕ), δηλαδή είναι κλειστό και φραγμένο. Επειδή $\mathbb{R}^m$ είναι συνεκτικός, $\phi(M)$ είναι ή $\mathbb{R}^m$ ή $\emptyset$. Επειδή $\mathbb{R}^m$ δεν είναι φραγμένο, κατ' ανάγκη έχουν $\phi(M) = \emptyset$, άτοπο. □

Επειδή κάθε πολλαπλότητα είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτική, κάθε συνεκτική πολλαπλότητα είναι επίσης κατά τόξα συνεκτική. Μια άλλη ιδιότητα των συνεκτικών πολλαπλοτήτων είναι η σταθερή διάσταση, όπως φαίνεται στην επόμενη

1.16 Πρόταση. *Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι συνεκτικός χώρος ως προς την κανονική τοπολογία, τότε οι χάρτες του $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση.*

Απόδειξη. Έστω για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ το σύνολο όλων των n-διάστατων χαρτών του $\mathcal{A}$. Τότε τα σύνολα

$$M_n := \bigcup_{(U,\phi)\in\mathcal{A}_n} U, \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι ανοιχτά, μη τεμνόμενα υποσύνολα του M, και κάποια από αυτά είναι μη κενά. Επομένως, κάθε μη κενό M_n είναι μια συνεκτική συνιστώσα του M. Αν ο M είναι συνεκτικός, μόνο μια τέτοια υπάρχει, και όλοι οι χάρτες έχουν την ίδια διάσταση. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο αποδεικνύοντας ότι τα ανοιχτά υποσύνολα μιάς πολλαπλότητας κληρονομούν τη δομή πολλαπλότητας. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

1.17 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ ένας n-διάστατος διαφορικός άτλαντας επί του M και $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Τότε το σύνολο*

$$\mathcal{A}|_A := \{(U \cap A,\, \phi|_{U\cap A}) : (U, \phi) \in \mathcal{A} \text{ με } U \cap A \neq \emptyset\}$$

είναι ένας n-διάστατος διαφορικός άτλαντας επί του A. Ιδιαιτέρως, αν $\mathcal{A}$ είναι μέγιστος, τότε $\mathcal{A}|_A$ είναι επίσης μέγιστος.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.4, τα στοιχεία του $\mathcal{A}|_A$ είναι χάρτες επί του M που ανήκουν στον $\mathcal{A}^*$. Προφανώς είναι επίσης χάρτες του A, καλύπτουν το A (αφού για κάθε $x \in A$ υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, επομένως $x \in A \cap U$) και είναι συμβιβαστοί μεταξύ τους (αφού ανήκουν στον ίδιο άτλαντα $\mathcal{A}^*$). Σαν αποτέλεσμα, ο $\mathcal{A}|_A$ είναι ένας n-διάστατος διαφορικός άτλαντας επί του A.

Έστω τώρα ότι ο $\mathcal{A}$ είναι μέγιστος και έστω (V, ψ) ένας χάρτης του A συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}|_A$. Θα δείξουμε ότι $(V, \psi) \in \mathcal{A}|_A$. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap V \neq \emptyset$. Επειδή (V, ψ) και $(U \cap A, \phi|_{U\cap A})$ είναι συμβιβαστοί, τα σύνολα $\phi|_{U\cap A}(U \cap A \cap V)$ και $\psi(U \cap A \cap V)$ είναι ανοιχτά στο $\mathbb{R}^n$ και οι απεικονίσεις

$$\psi \circ \phi|_{U\cap A}^{-1} : \phi|_{U\cap A}(U \cap A \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap A \cap V),$$
$$\phi|_{U\cap A} \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap A \cap V) \longrightarrow \phi|_{U\cap A}(U \cap A \cap V)$$

είναι διαφορίσιμες. Όμως, αφού $A \cap V = V$,

$$\phi|_{U\cap A}(U \cap A \cap V) = \phi(U \cap A \cap V) = \phi(U \cap V),$$
$$\psi(U \cap A \cap V) = \psi(U \cap V)$$

και

$$\psi \circ \phi|_{U\cap A}^{-1} = \psi \circ \phi^{-1}|_{\phi(U\cap V)},$$
$$\phi|_{U\cap A} \circ \psi^{-1} = \phi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U\cap V)},$$

δηλαδή, οι χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) είναι συμβιβαστοί. Άρα $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, επομένως $(V \cap A,\, \psi|_{V\cap A}) = (V, \psi) \in \mathcal{A}|_A$. $\square$

Θα λέμε ότι η διαφορική πολλαπλότητα $(A, (\mathcal{A}|_A)^*)$ που ορίστηκε στην προηγούμενη πρόταση είναι μια **ανοιχτή υποπολλαπλότητα** του $(M, \mathcal{A}^*)$.