ΜΑΘΗΜΑ 08

1 Η εφαπτόμενη δέσμη

Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Θεωρούμε όλους τους εφαπτόμενους χώρους T_xM, $x \in M$, και θέτουμε

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_xM \tag{1}$$

και

$$\pi(u) := x, \quad \text{αν } u \in T_xM. \tag{2}$$

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι TM είναι μια διαφορική πολλαπλότητα και ότι $\pi : TM \to M$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

1.1 Ορισμός. Το σύνολο TM ονομάζεται **εφαπτόμενη δέσμη** του M και η απεικόνιση π **προβολή** της TM επί του M.

Πιο τυπικά, και σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιείται για τις νηματικές δέσμες, η εφαπτόμενη δέσμη της M είναι η τριάδα (TM, π, M). Η TM ονομάζεται **ολικός χώρος**, η π **προβολή** και η M **βάση** της δέσμης. Εμείς θα χρησιμοποιούμε την απλούστερη ορολογία του Ορισμού 1.1.

1.2 Λήμμα. *Η απεικόνιση $\pi : TM \to M$ είναι επί.*

Απόδειξη. Έστω $x \in M$. Ο εφαπτόμενος χώρος T_xM δεν είναι κενός· για κάθε $u \in T_xM$, έχουμε $\pi(u) = x$. $\square$

1.3 Θεώρημα. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Τότε TM εφοδιάζεται με δομή $2m$-διάστατης διαφορικής πολλαπλότητας.*

Απόδειξη. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το ζεύγος $(\pi^{-1}(U), \Phi)$, όπου η απεικόνιση

$$\Phi : \pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} T_x M \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

ορίζεται από την ισότητα

$$\Phi(u) := (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)). \tag{3}$$

(1) Ισχυριζόμαστε ότι $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ είναι ένας $2m$–διάστατος χάρτης της TM.

(1α) *Η απεικόνιση Φ είναι 1-1*: Αν $u, v \in TM$ με $\Phi(u) = \Phi(v)$, τότε η (3) συνεπάγεται ότι $\phi(\pi(u)) = \phi(\pi(v))$. Επειδή ϕ είναι 1–1, $\pi(u) = \pi(v)$, δηλαδή, u και v ανήκουν στον ίδιο εφαπτόμενο χώρο $T_x M$, με $x = \pi(u) = \pi(v)$. Ακόμη, $\bar{\phi}(u) = \bar{\phi}(v)$ και $\bar{\phi} : T_x M \to \mathbb{R}^m$ είναι αμφιμονοσήμαντη, έτσι $u = v$.

(1β) *Η εικόνα $\Phi(\pi^{-1}(U))$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$*: Θα δείξουμε ότι $\Phi(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Επειδή, προφανώς, $\Phi(\pi^{-1}(U)) \subseteq \phi(U) \times \mathbb{R}^m$, αρκεί να αποδείξουμε ότι Φ είναι επί του $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Έστω $(h, k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Υπάρχει ένα μοναδικό $x \in U$ με $\phi(x) = h$. Θεωρούμε τον επιμορφισμό $\bar{\phi} : T_x M \to \mathbb{R}^m$. Για το στοιχείο $k \in \mathbb{R}^m$, υπάρχει ένα μοναδικό $u \in T_x M$ με $\bar{\phi}(u) = k$. Επομένως,

$$\Phi(u) = (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)) = (\phi(x), k) = (h, k),$$

και η εικόνα $\Phi(\pi^{-1}(U))$ είναι το σύνολο $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$, που είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, σαν καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$.

(2) Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i) : (U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}\}$$

από όλους τους χάρτες στην TM της προηγούμενης μορφής, και ισχυριζόμαστε ότι ο $\mathcal{B}$ είναι ένας διαφορικός άτλαντας επί της TM.

(2α) *Οι χάρτες του $\mathcal{B}$ καλύπτουν την TM*, διότι

$$\bigcup_i \pi^{-1}(U_i) = \pi^{-1}(\bigcup_i U_i) = \pi^{-1}(M) = TM.$$

(2β) *Οι χάρτες του $\mathcal{B}$ είναι διαφορικά συμβιβαστοί*: Θεωρούμε δύο χάρτες (U_i, ϕ_i) και (U_j, ϕ_j) του $\mathcal{A}$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, και τους αντίστοιχους χάρτες $(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i)$ και $(\pi^{-1}(U_j), \Phi_j)$ στον $\mathcal{B}$. Τότε

$$\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j) = \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$$

και

$$\Phi_i(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \Phi_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)) = \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, αφού $\phi_i(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, από την συμβιβαστότητα των (U_i, ϕ_i) και (U_j, ϕ_j). Όμοια, η εικόνα

$$\Phi_j(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τώρα τις απεικονίσεις μεταφοράς

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} &: \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m, \\ \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} &: \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμες. Για την πρώτη, θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $(h, k) \in \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m = \Phi_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j))$. Τότε $\Phi_i^{-1}(h, k) = u$, για ένα μοναδικό $u \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ με $\phi_i(\pi(u)) = h$ και $\bar{\phi}(u) = k$. Αρα,

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(h, k) &= \Phi_j(u) = (\phi_j(\pi(u)),\, \bar{\phi}_j(u)) \\ &= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(\phi_i(\pi(u))),\, \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_i^{-1}(\bar{\phi}_i(u))) \\ &= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(h),\, \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_i^{-1}(k)) \\ &= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(h),\, [D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(h)](k)). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη συντεταγμένη στην ανωτέρω έκφραση είναι διαφορίσιμη, διότι

$$(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(h) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1} \circ pr_1)(h, k).$$

Από την άλλη μεριά, η δεύτερη συντεταγμένη είναι διαφορίσιμη, διότι είναι η σύνθεση των διαφορίσιμων απεικονίσεων στο επόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}"] \arrow[dr] & L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "ev"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

όπου

$$(D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(h, k) = (D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(h), k) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$$

για κάθε $(h,k) \in \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$, και

$$ev(f,k) := f(k) \in \mathbb{R}^m,$$

για κάθε $f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ και $k \in \mathbb{R}^m$. Υπενθυμίζουμε ότι, αφού η

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

είναι διαφορίσιμη, η παράγωγος

$$D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) : U_i \cap U_j \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

είναι επίσης διαφορίσιμη και ότι η (εκτιμήτρια) ev είναι διαφορίσιμη αφού είναι διγραμμική. Έτσι $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. Το ίδιο ισχύει και για την αντίστροφη $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$.

Σαν αποτέλεσμα, ο $\mathcal{B}$ είναι ένας $2m$-διάστατος διαφορικός άτλαντας της TM και ο αντίστοιχος μέγιστος άτλαντας $\mathcal{B}'$ ορίζει μια διαφορική δομή στην TM. □

1.4 Παρατήρηση. Στο προηγούμενο θεώρημα, υποθέτοντας ότι M είναι διαφορική πολλαπλότητα, δείχνουμε ότι TM είναι επίσης διαφορική πολλαπλότητα. Αν M είναι $\mathcal{C}^r$–πολλαπλότητα, με r πεπερασμένο, τότε η απεικόνιση μεταφοράς $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^r$–διαφορίσιμη, αλλά η παράγωγός της

$$D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) : \phi(U_i \cap U_j) \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

είναι $\mathcal{C}^{r-1}$–διαφορίσιμη και η τάξη διαφορισιμότητας επί της TM είναι περιορισμένη κατά μια μονάδα.

1.5 Πρόταση. *Αν M είναι μια διαφορική πολλλαπλότητα, η απεικόνιση $\pi : TM \to M$ είναι διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $u \in TM$. Θα δείξουμε ότι η π είναι διαφορίσιμη στο u. Το u είναι διάνυσμα ενός εφαπτόμενου χώρου, έστω του T_xM, οπότε $\pi(u) = x$. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο χάρτη $(\pi^{-1}(U), \Phi) \in \mathcal{B}$. Τότε $u \in \pi^{-1}(U)$ και $\pi(\pi^{-1}(U)) \subseteq U$, δηλ. το ζεύγος των χαρτών $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ και (U, ϕ) μας δίνουν τοπική παράσταση της π

$$\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1} : \Phi(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi(U).$$

Έστω $(h,k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Υπάρχει ένα μοναδικό $u \in \pi^{-1}(U)$ με $\Phi(u) = (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)) = (h,k)$. Τότε

$$(\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1})(h,k) = \phi(\pi(u)) = h = pr_1(h,k)$$

δηλαδή, $\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1} = pr_1$ είναι διαφορίσιμη, σαν περιορισμός γραμμικής σε ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. □

2 Ολικό Διαφορικό

2.1 Ορισμός. Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Ονομάζουμε **εφαπτόμενη απεικόνιση** ή **παράγωγο** ή **ολικό διαφορικό της** f την απεικόνιση $Tf : TM \to TN$, που δίνεται από την σχέση

$$Tf := \bigcup_{x \in M} T_x f$$

ή, ισοδύναμα,

$$Tf|_{T_x M} = T_x f.$$

Δηλαδή, για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in TM$,

$$Tf(u) = T_x f(u).$$

2.2 Παρατήρηση. Να σημειωθεί ότι Tf *δεν* είναι γραμμική απεικόνιση, παρ' όλο που οι περιορισμοί της στους εφαπτόμενους χώρους είναι γραμμικές.

2.3 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν π_M και π_N συμβολίζουν τις προβολές των εφαπτόμενων δεσμών TM και TN, αντίστοιχα, τότε $Tf : TM \to TN$ είναι διαφορίσιμη και το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την μεταθετικότητα του διαγράμματος: για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in TM$, έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_N \circ Tf(u) &= \pi_N \circ T_x f([(\alpha, x)]) = \pi_N([(f \circ \alpha, f(x))]) = \\ &= f(x) = f \circ \pi_M([(\alpha, x)]) = f \circ \pi_M(u), \end{aligned}$$

δηλαδή, $\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M$ και το διάγραμμα είναι μεταθετικό.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι Tf είναι διαφορίσιμη σε ένα τυχαίο σημείο $u_o = [(\alpha, x_o)] \in TM$. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο x_o, υπάρχουν χάρτες $(U,\phi) \in \mathcal{A}$, $(V,\psi) \in \mathcal{B}$, με $x_o \in U$ και $f(U) \subseteq V$, έτσι ώστε $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ είναι διαφορίσιμη στο $\phi(U)$. Θεωρούμε τους χάρτες $(\pi_M^{-1}(U), \Phi)$ και $(\pi_N^{-1}(V), \Psi)$, αντίστοιχα. Τότε, $x_o \in U$ συνεπάγεται ότι $u_o \in \pi_M^{-1}(U)$ και η μεταθετικότητα του διαγράμματος συνεπάγεται ότι $Tf(\pi_M^{-1}(U)) \subseteq \pi_N^{-1}(V)$. Πράγματι, για κάθε $u \in \pi_M^{-1}(U)$, $\pi_N \circ Tf(u) = f \circ \pi_M(u) \in f(U) \subseteq V$, δηλαδή, $Tf(u) \in \pi_N^{-1}(V)$. Εφαρμόζουμε την τοπική παράσταση

$$\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1} : \phi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n$$

της Tf μέσω Φ και Ψ στο $(h,k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$: υπάρχει ένα μοναδικό $u = [(\alpha, x)] \in \pi_M^{-1}(U)$ με $\Phi(u) = (\phi(x), \bar{\phi}(u)) = (h,k)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h,k) &= \Psi \circ Tf(u) = (\psi \circ \pi_N \circ Tf(u), \bar{\psi} \circ Tf(u)) = \\
&= (\psi \circ f \circ \pi_M(u), \bar{\psi} \circ T_x f(\bar{\phi}^{-1}(k))) \\
&= (\psi \circ f(x), \bar{\psi} \circ T_x f \circ \bar{\phi}^{-1}(k)) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(\phi(x)), D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x))(k)) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h), D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(h)(k)).
\end{aligned}$$

Οι παράγοντες της $\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h,k)$

$$\begin{aligned}
pr_1(\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h,k)) &= \psi \circ f \circ \phi^{-1}(h) = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ pr_1(h,k), \\
pr_2(\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h,k)) &= ev \circ (D(\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}) \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})(h,k),
\end{aligned}$$

όπου

$$ev : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n : (f,x) \mapsto f(x)$$

είναι η εκτιμήτρια απεικόνιση, είναι διαφορίσιμοι σαν συνθέσεις διαφορίσιμων απεικονίσεων, επομένως $\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. $\square$

2.4 Παρατήρηση. Αν $f : M \to N$ είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη, τότε $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη, αλλά $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ είναι $\mathcal{C}^{k-1}$–διαφορίσιμη, δηλαδή, Tf είναι $\mathcal{C}^{k-1}$–διαφορίσιμη.