ΑΣΚΗΣΕΙΣ 07
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ

1. Έστω $(U,\phi),(V,\psi)$ χάρτες μιας m-διάστατης πολλαπλότητας M και $x\in U\cap V$. Συμβολίζουμε με

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x\right\}_{1\le i\le m} \quad \text{και} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_x\right\}_{1\le i\le m}$$

τις κανονικές βάσεις του T_xM που ορίζονται από τους (U,ϕ) και (V,ψ), αντίστοιχα. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\bigg|_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(x_i\circ\psi^{-1})}{\partial u_j}\bigg|_{\psi(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x .$$

Πώς συνδέονται ο πίνακας αλλαγής βάσης (των ανωτέρω βάσεων) με την απεικόνιση μεταφοράς των χαρτών;

2. Έστω $f: M\times N\to\mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση και $w\in T_{(x,y)}(M\times N)$. Αν $w\equiv(u,v)\in T_xM\times T_yN$, δείξτε ότι $w(f)=u(f_y)+v(f_x)$.

3. Θεωρώντας το εφαπτόμενο διάνυσμα $\dot\alpha(t)\in T_{\alpha(t)}M$ μιας διαφορίσιμης καμπύλης $\alpha: J\to M$ σαν παραγώγιση, δείξτε ότι

$$\dot\alpha(t)(f)=(f\circ\alpha)'(t),$$

για κάθε $f\in\mathcal{C}^\infty_{\alpha(t)}(M,\mathbb{R})$.

4. Θεωρείστε το $\mathbb{R}^3$ με την συνήθη διαφορική δομή. Αν $p=(1,0,0)$, $u\in T_p\mathbb{R}^3$ έχει συντεταγμένες $(1,2,3)$, ως προς τον χάρτη $(\mathbb{R}^3,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, και $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ δίνεται από $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, τότε υπολογίστε το $u(f)$.

5. Έστω η απεικόνιση $f: S^2\to\mathbb{R}$, με $f(x,y,z)=x^2+(1+2y)z^2$. Αν $p=\left(-\sqrt{3}/2,0,1/2\right)$, υπολογίστε την παράσταση $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$, όπου x_i ($i=1,2$) είναι οι συντεταγμένες του χάρτη (U_z^+,ϕ_z^+) της S^2.

6. Έστω $u=(3,2,-1)\in T_p\mathbb{R}^3$, όπου $p=(2,0,1)$ και $\mathbb{R}^3$ έχει την συνήθη διαφορική δομή. Αν $f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ δίνονται από τις ισότητες $f(x,y,z)=y^2z$ και $g(x,y,z)=e^x\cos y$, υπολογίστε τα $u(f\cdot g)$, $u(f^2+3g)$, $T_pf(u)$ και $T_pg(u)$.

7. Έστω $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ η καμπύλη $\alpha(t)=[(2t+1,1,t^2)]$ και $u=[(\alpha,\alpha(0))]$. Υπολογίστε το $u(f)$, για την $f:\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, με $f([(x,y,z)])=\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}$.

8. Έστω $u=[(\alpha,x)]\in T_xM$ και $(U,\phi=(x_1,\dots,x_m))$ χάρτης στο x. Τότε

$$u=\sum_{i=1}^m \alpha_i'(0)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x, \quad \text{όπου} \quad \alpha_i=x_i\circ\alpha.$$