ΑΣΚΗΣΕΙΣ 06
ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

1. Αν $f : M \to N$ είναι σταθερή, τότε $T_x f = 0$, για κάθε $x \in M$.

2. Αν $\big(x_1, \ldots, x_m\big)$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων ενός χάρτη (U, ϕ), δείξτε ότι

$$(\,\overline{\text{id}}_{\mathbb{R}^m} \circ T_x x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x\right) = \delta_{ij};$$

επομένως,

$$T_x x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x\right) = \begin{cases} 0 \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i \neq j \\ \dfrac{d}{dt}\bigg|_{x_i(x)} \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i = j. \end{cases}$$

3. Αν $f_i : M_i \to N_i$ $(i = 1, 2)$ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις, τότε,

$$T_{(x_1,x_2)}(f_1 \times f_2) \equiv T_{x_1} f_1 \times T_{x_2} f_2.$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$.

4. Αν $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$, δείξτε ότι $\dot{\alpha}(0) = u$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to S^1$ με $f(t) := (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$. Δείξτε ότι $T_{\frac{1}{4}} f$ είναι 1-1.

6. Υπολογίστε το διαφορικό της απεικόνισης

$$f : S^2 \longrightarrow S^2 : f(p) = -p$$

μέσω των βασικών εφαπτόμενων διανυσμάτων ενός χάρτη της επιλογής σας.

7. Έστω $f : S^2 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με $f(x, y, z) = [(x, y, z)]$, για κάθε $(x, y, z) \in S^2$. Θεωρούμε τον χάρτη (U_z^+, ϕ_z^+) της S^2 και το σημείο $N \in U_z^+$. Αν $w \in T_x S^2$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα με συντεταγμένες $(1, 2)$ ως προς τον ανωτέρω χάρτη, υπολογίστε το $T_N f(w)$ ως προς κατάλληλη βάση του $T_{f(N)}\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

8. Δείξτε ότι η κανονική εμφύτευση $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση της οποίας το διαφορικό στο $(1, 0, 0)$ είναι 1-1.

9. Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη και Γ_f το γράφημα της f. Να δείξετε ότι

(α) Το Γ_f δέχεται δομή διαφορικής πολλαπλότητας ίδιας διάστασης με την M, έτσι ώστε ο περιορισμός της προβολής στην M

$$p_M|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \longrightarrow M$$

να είναι αμφιδιαφόριση.

(β) Η $j : M \to \Gamma_f$, με $j(x) = (x, f(x))$, είναι διαφορίσιμη και το διαφορικό της σε κάθε $x \in M$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

10. Έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση με $T_x f = 0$, για κάθε $x \in M$. Δείξτε ότι αν M είναι συνεκτικό, τότε f είναι σταθερή.

11. Έστω $f : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση με

$$f(x,y,t) = \left(\frac{x}{1+t^2}, \frac{y}{1+t^2} \right).$$

Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα Jacobi της f σε ένα σημείο $p = (x,y,t)$, με $x > 0$ και βρείτε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $S^1 \times \mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι αμφιδιαφόριση.

12. Αν $(x_1, \ldots, x_m)$ είναι οι συντεταγμένες ενός χάρτη (U, ϕ), δείξτε ότι

$$(\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \circ T_x x_i) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x \right) = \delta_{ij},$$

επομένως,

$$T_x x_i \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_x \right) = \begin{cases} 0 \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i \neq j \\ \frac{d}{dt}\big|_{x_i(x)} \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i = j. \end{cases}$$