ΑΣΚΗΣΕΙΣ 03
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

1. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.10, αποδείξτε ότι:

(i) Η τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$, που ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$ από την συνήθη διαφορική δομή του, συμπίπτει με τη συνήθη τοπολογία του.

(ii) Οι τοπολογίες $\tau_{\mathcal{A}}$ και $\tau_{\mathcal{B}}$ του S^2 που ορίζονται από τους άτλαντες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ των στερεογραφικών προβολών και των ημισφαιρίων, αντίστοιχα, συμπίπτουν με τη σχετική τοπολογία που ορίζεται στο S^2 από τον $\mathbb{R}^3$.

(iii) Η τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$ του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ συμπίπτει με την τοπολογία–πηλίκο του $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim$.

(iv) Η τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}|_A}$ μιας ανοιχτής υποπολλαπλότητας A συμπίπτει με τη σχετική τοπολογία του υποσυνόλου A του M (όπου M είναι εφοδιασμένο με $\tau_{\mathcal{A}}$).

(v) Η τοπολογία $\tau_{\mathcal{C}}$ του $M \times N$ (Πρότ. 2.7 του Μαθήματος 02) συμπίπτει με την τοπολογία–γινόμενο $\tau_{\mathcal{A}} \times \tau_{\mathcal{B}}$.

2. Αποδείξτε ότι η γενική γραμμική ομάδα $GL(n,\mathbb{R})$ είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα του $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

3. Αποδείξτε ότι $GL(n,\mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγής πολλαπλότητα.

4. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R}_*$ δεν είναι συνεκτική πολλαπλότητα.

5. Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

και τον άτλαντα $\mathcal{A} = \{(U_i,\phi_i) \ : \ i = 1,2\}$ της Ασκησης 17, από τις Ασκήσεις 01. Να δείξετε ότι $(M,\tau_{\mathcal{A}})$ δεν είναι χώρος Hausdorff.

6. Έστω $\mathcal{A}$ ένας μέγιστος άτλαντας. Αποδείξτε ότι τα μη κενά ανοιχτά σύνολα της τοπολογίας $\tau_{\mathcal{A}}$ συμπίπτουν με τα πεδία ορισμού των χαρτών του $\mathcal{A}$, αν και μόνον αν ο $\mathcal{A}$ περιέχει έναν ολικό χάρτη.

7. Έστω $\mathcal{A}$ άτλαντας επί του $M \neq \emptyset$, με την ιδιότητα: για κάθε $x \neq y \in M$, υπάρχει $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ με $x, y \in U$. Να δείξετε ότι η κανονική τοπολογία που ορίζεται από τον $\mathcal{A}$ κάνει το M χώρο Hausdorff.