ΑΣΚΗΣΕΙΣ 01-02
ΧΑΡΤΕΣ-ΑΤΛΑΝΤΕΣ-ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

1. Αν $U = (0,1) \times (0, \pi/2) \subseteq \mathbb{R}^2$ και

$$\phi : U \to \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

αποδείξτε ότι (U, ϕ) είναι ένας χάρτης που ανήκει στη συνήθη διαφορική δομή του $\mathbb{R}^2$.

2. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to (x^2 + 2y^2, 3xy)$$

ορίζει σε κατάλληλα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ (ποιά;) χάρτες που ανήκουν στη συνήθη διαφορική δομή του $\mathbb{R}^2$.

3. Αποδείξτε ότι οι χάρτες (U_N, ϕ_N), (U_S, ϕ_S) του S^2 είναι συμβιβαστοί με τους χάρτες $(U_i^\alpha, \phi_i^\alpha)$. Τί μπορείτε να συμπεράνετε για αυτές τις δύο διαφορικές δομές του S^2;

4. Να δείξετε ότι οι άτλαντες $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ του κύκλου (Παράδειγμα 1.2(Δ), του Μαθήματος 02) είναι διαφορικά συμβιβαστοί μεταξύ τους.

5. Αποδείξτε ότι η n–διάστατη σαμπρέλλα $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n.

6. Έστω K η επιφάνεια του κυλίνδρου και B_1, B_2 οι βάσεις της. Δείξτε ότι $K \setminus (B_1 \cup B_2)$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

7. Στο Παράδειγμα 1.2(Α) του Μαθήματος 02, βρείτε τους χάρτες του μέγιστου άτλαντα.

8. Έστω $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$. Αποδείξτε ότι το μονοσύνολο $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$ ορίζει μια διαφορική δομή στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε αν ο χάρτης $(\mathbb{R}, \psi)$ είναι τοπολογικά ή διαφορικά συμβιβαστός με το χάρτη $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$. Τί συμπεραίνετε;

9. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των χαρτών *δεν* είναι σχέση ισοδυναμίας.

10. Έστω (U, ϕ) ένας m–διάστατος χάρτης του M, έστω $y \in \mathbb{R}^m$ και έστω

$$\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : x \to x + y$$

η αντίστοιχη μεταφορά. Αποδείξτε ότι οι χάρτες (U, ϕ) και $(U, \mu \circ \phi)$ είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

11. Αποδείξτε ότι κάθε χάρτης (U, ϕ) ενός συνόλου M είναι διαφορικά συμβιβαστός με ένα άπειρο (μη αριθμήσιμο) πλήθος χαρτών.

12. Αποδείξτε ότι αν από ένα μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}$ αφαιρεθεί ένα αριθμήσιμο πλήθος χαρτών του, προκύπτει ένας άτλαντας.

13. Αν ένας τοπολογικός άτλαντας $\mathcal{A}$ είναι μέγιστος, αποδείξτε ότι αυτός περιέχει χάρτες που δεν είναι $\mathcal{C}^1$–συμβιβαστοί, επομένως ο $\mathcal{A}$ δεν είναι $\mathcal{C}^k$–άτλαντας, γιά $k \geq 1$. Άρα ένας μέγιστος τοπολογικός άτλαντας δεν μπορεί να είναι διαφορικός άτλαντας.

14. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλοτητα. Τότε, για κάθε $x \in M$:

(α) Υπάρχει χάρτης $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ *με κέντρο* x, δηλ. $\phi(x) = 0$.

(β) Υπάρχει χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $\psi(V) = \mathbb{R}^m$.

(γ) Υπάρχει χάρτης $(W, \chi) \in \mathcal{A}$ με $\chi(W) = \mathbb{R}^m$, και $\chi(x) = 0$.

15. Θεωρείστε το σύνολο $X = X_1 \cup X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου $X_1 := \mathbb{R} \times \{0\}$ και $X_2 := D\big((0,2), 1\big)$ [: ο ανοιχτός δίσκος κέντρου $(0, 2)$ και ακτίνας 1]. Αποδείξτε ότι

(α) (X_1, pr_1) και (X_2, id_{X_2}) είναι χάρτες του X.

(β) Το σύνολο $\mathcal{A} = \{(X_1, \mathrm{pr}_1), (X_2, \mathrm{id}_{X_2})\}$ είναι διαφορικός άτλαντας του X.

Ποιά είναι η διάσταση του $\mathcal{A}$;

16. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη και

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \,:\, x \in U\} \subseteq U \times \mathbb{R}^n$$

το γράφημα της f. Να δείξετε ότι Γ_f είναι m-διάστατη πολλαπλότητα.

17. Έστω $M = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{(0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Θέτουμε

$$U_1 = \mathbb{R} \times \{0\}, \qquad U_2 = (\mathbb{R}_* \times \{0\}) \cup \{(0, 1)\}$$

και θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\phi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R} : \phi_1(x, y) = x,$$
$$\phi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R} : \phi_2(x, y) = x$$

Να δείξετε ότι τα ζεύγη (U_i, ϕ_i), $i = 1, 2$, είναι 1-διάστατοι χάρτες του M, διαφορικά συμβιβαστοί μεταξύ τους.

18. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια n-διάστατη $\mathcal{C}^k$–πολλαπλότητα, $N \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $f : M \to N$ 1-1 και επί. Να δείξετε ότι το N δέχεται δομή n-διάστατης $\mathcal{C}^k$–πολλαπλότητας.