ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1 Ορισμοί και Βασικά Αποτελέσματα

1.1. Ορισμός. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $a \in U$ και $f : U \to \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f **είναι διαφορίσιμη στο** a, αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $Df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (δηλ. $Df(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$), έτσι ώστε

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1}$$

Η γραμμική απεικόνιση $Df(a)$ λέγεται **διαφορικό της** f **στο** a.

1.2. Ειδική περίπτωση. Έστω I ένα ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $t_o \in I$. Τότε το διαφορικό της f στο t_o

$$Df(t_o) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

επειδή είναι γραμμική απεικόνιση, ικανοποιεί την σχέση

$$Df(t_o)(t) = tDf(t_o)(1)\,, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, από τον ορισμό της διαφορίσιμης απεικόνισης, έχουμε

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(t_o + t) - f(t_o) - tDf(t_o)(1)|}{|t|} = 0.$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t_o + t) - f(t_o)}{t} = Df(t_o)(1).$$

Σε αυτή την περίπτωση, θέτουμε

$$f'(t_o) := Df(t_o)(1), \tag{2}$$

και παίρνουμε

$$Df(t_o)(t) = t \cdot f'(t_o)\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Αν $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και η $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, τα επόμενα αποτελέσματα είναι άμεσα:

1.3. Πρόταση. *Το διαφορικό της f στο a είναι μονοσήμαντα ορισμένο.*

1.4. Πρόταση. *Η f είναι συνεχής στο a.*

1.5. Πρόταση. *Ο περιορισμός της f σε κάθε ανοιχτό $V \subseteq U$ με $a \in V$, είναι διαφορίσιμος στο a.*

1.6. Ορισμός. Αν $U \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{R}^n$, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη στο** U, αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $x \in U$.

Οι επόμενες τρεις προτάσεις μας εξασφαλίζουν την διαφορισιμότητα κάποιων απλών απεικονίσεων:

1.7. Πρόταση. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{R}^n$. Αν η f είναι σταθερή, τότε είναι διαφορίσιμη στο U, και $Df(x) = 0$, για κάθε $x \in U$.*

Αντίστροφα, αν η f είναι διαφορίσιμη με $Df(x) = 0$, για κάθε $x \in U$, τότε η f είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του U. Ιδιαιτέρως, αν U είναι συνεκτικό, τότε η f είναι σταθερή.

1.8. Πρόταση. *Αν $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε η f είναι διαφορίσιμη και*

$$Df(x) = f, \tag{4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Δηλ.

$$[Df(x)](h) = f(h), \tag{5}$$

για κάθε $h \in \mathbb{R}^m$.

1.9. Πρόταση. *Αν $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ είναι μια διγραμμική απεικόνιση, δηλ.*

$$f \in L_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k),$$

τότε, η f είναι διαφορίσιμη και

$$[Df(a,b)](h,k) = f(h,b) + f(a,k), \tag{6}$$

για κάθε $(a,b), (h,k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

1.10. Πόρισμα. *(i) Κάθε εσωτερικό γινόμενο*

$$< , >: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμο, σαν διγραμμική απεικόνιση, και

$$[D < , > (x,y)](h,k) =< h, y > + < x, k >, \tag{7}$$

για κάθε $x, y, h, k \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Το εξωτερικό γινόμενο

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

είναι διαφορίσιμο, σαν διγραμμική απεικόνιση, και

$$[D \times (x,y)](h,k) = h \times y + x \times k, \tag{8}$$

για κάθε $x, y, h, k \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Η εκτιμήτρια απεικόνιση

$$ev : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : (f, x) \mapsto ev(f,x) := f(x)$$

είναι διαφορίσιμη, σαν διγραμμική απεικόνιση, και

$$[Dev(f,x)](g,y) = g(x) + f(y), \tag{9}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^m$ και $f, g \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

(iv) Η σύνθεση

$$co : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) : (f, g) \mapsto co(f,g) := g \circ f$$

είναι διαφορίσιμη, σαν διγραμμική απεικόνιση, και

$$[Dco(f_o, g_o)](f,g) = g_o \circ f + g \circ f_o, \tag{10}$$

για κάθε $f_o, f \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ *και* $g_o, g \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η Πρόταση 9 και το Πόρισμα 10 είναι ειδικές περιπτώσεις του παρακάτω γενικού αποτελέσματος:

1.11. Πρόταση. *Αν* $f : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}^n$ *είναι μια* k*-πλειογραμμική απεικόνιση, δηλ.*

$$f \in L_k(\mathbb{R}^{m_1}, \cdots, \mathbb{R}^{m_k}; \mathbb{R}^n),$$

τότε η f *είναι διαφορίσιμη και*

$$\begin{aligned} Df(x)(h) &= f(h_1, x_2, \ldots, x_k) + f(x_1, h_2, x_3, \ldots, x_k) + \cdots \\ &\quad + f(x_1, \ldots, x_{k-2}, h_{k-1}, x_k) + f(x_1, \ldots, x_{k-1}, h_k), \end{aligned}$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k), h = (h_1, h_2, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k}$.

Σχετικά με την σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων, ισχύει το επόμενο θεώρημα:

1.12. Θεώρημα (Κανόνας της Αλυσίδας). *Υποθέτουμε ότι* $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοιχτά,* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *διαφορίσιμη στο* $a \in U$, *με* $f(U) \subseteq V$, *και* $g : V \to \mathbb{R}^k$ *διαφορίσιμη στο* $f(a) \in V$. *Τότε η σύνθεση* $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ *είναι διαφορίσιμη στο* a *και*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a). \tag{11}$$

Οι επόμενες τρεις προτάσεις αναφέρονται σε απεικονίσεις που ορίζονται ή έχουν πεδίο τιμών ένα καρτεσιανό γινόμενο ευκλείδειων χώρων.

1.13. Πρόταση. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *ανοιχτό και* $f : U \to \mathbb{R}^n$. *Συμβολίζουμε με* f_i *τις συνθέσεις* $f_i := pr_i \circ f$, *όπου* $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *είναι η* i*-προβολή (δηλ.* $pr_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$*). Τότε η* f *είναι διαφορίσιμη στο* $a \in U$ *αν και μόνον αν* f_i *είναι διαφορίσιμη στο* a, *για κάθε* $i = 1, \ldots, n$ *και*

$$Df(a) = (Df_1(a), \ldots, Df_n(a)). \tag{12}$$

Ιδιαιτέρως, αν $U = I \subseteq \mathbb{R}$, *θέτοντας* $f'(a) := Df(a)(1)$, *παίρνουμε*

$$f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_n'(a)). \tag{13}$$

Στην ειδική περίπτωση που ο κανόνας της αλυσίδας εφαρμόζεται σε απεικονίσεις $f : I \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ και $g : V \to \mathbb{R}^n$, όπου το πεδίο ορισμού της f είναι ένα ανοιχτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ισότητες (2) και (13), έχουμε

$$(g \circ f)'(t) = [Dg(f(t))](f'(t)), \tag{14}$$

για κάθε $t \in I$.

1.14. Πρόταση. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^p$ ανοιχτά. Τότε οι απεικονίσεις $f : U \to \mathbb{R}^m$ και $g : V \to \mathbb{R}^q$ είναι διαφορίσιμες στα $a \in U$ και $b \in V$, αντίστοιχα, αν και μόνον αν η απεικόνιση*

$$f \times g : U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q : (x, y) \longmapsto (f(x), g(y))$$

είναι διαφορίσιμη στο (a, b). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$D(f \times g)(a, b) = Df(a) \times Dg(b). \tag{15}$$

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ και $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $a \in U$ και $b \in V$. Έστω ακόμη μια απεκόνιση $f : U \times V \to \mathbb{R}^p$. Συμβολίζουμε με f_a και f_b τις μερικές απεικονίσεις της f στο (a, b), δηλ. τις

$$\begin{aligned} f_a &: V \to \mathbb{R}^p : v \longmapsto f_a(v) := f(a, v), \\ f_b &: U \to \mathbb{R}^p : u \longmapsto f_b(u) := f(u, b). \end{aligned}$$

Ισχύει το επόμενο

1.15. Θεώρημα. *Έστω μια απεικόνιση f, όπως προηγουμένως. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $(a, b) \in U \times V$, τότε και οι f_a και f_b είναι διαφορίσιμες στα b και a, αντίστοιχα, και ισχύει ο τύπος του Leibniz*

$$[Df(a, b)](h, k) = [Df_a(b)](k) + [Df_b(a)](h),$$

για κάθε $(h, k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

1.16. Ορισμός. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση στο $a \in U$. Τότε το διαφορικό $Df(a) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ αντιστοιχεί με ένα πίνακα $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, μέσω των σχέσεων

$$a_{ji} := pr_j(Df(a)(e_i)) = D(pr_j \circ f)(a)(e_i) = Df_j(a)(e_i). \tag{16}$$

Ο ανάστροφος του (16) λέγεται **πίνακας Jacobi της** f **στο** a και συμβολίζεται με $J_a f$.

Όπως γνωρίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα, ο $J_a f$ είναι ακριβώς ο πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση $Df(a)$, ως προς τις κανονικές βάσεις.

Συνήθως, πρώτα υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi και τότε βρίσκουμε την γραμμική απεικόνιση $Df(a)$, μέσω της ισότητας

$$[Df(a)](h_1, \ldots, h_m) = (J_a f) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \tag{17}$$

για κάθε $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m$.

1.17. Ορισμός. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{R}^n$ και $a = (a_1, \ldots, a_m) \in U$. Υπάρχουν ανοιχτά διαστήματα $I_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, με $a \in I_1 \times \cdots \times I_m \subseteq U$. Λέμε ότι **η** f **είναι διαφορίσιμη στο** $a \in U$ **ως προς την** i**-μεταβλητή**, ή ότι **υπάρχει η** i**-μερική παράγωγος της** f **στο** $a \in U$, αν υπάρχει η παράγωγος της μερικής απεικόνισης

$$I_i \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

στο a_i. Το διαφορικό της ανωτέρω απεικόνισης θα το συμβολίζουμε με

$$D_i f(a) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

και μπορούμε να το ταυτίζουμε με το διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, που συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_a$ και δίνεται από την ισότητα

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a = [D_i f(a)](1). \tag{18}$$

Η διαφορισιμότητα της f στο a, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(a + te_i) - f(a) - [Df(a)](te_i)\|}{\|te_i\|} = 0,$$

που με την σειρά του είναι ισοδύναμο με

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = [Df(a)](e_i).$$

Επομένως παίρνουμε

$$[D_i f(a)](1) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a = [Df(a)](e_i). \tag{19}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με την (16), βρίσκουμε για τον πίνακα Jacobi της f στο a

$$J_a f = \left(\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_a \right)^t = ([Df_j](e_i))^t. \tag{20}$$

1.18. Ορισμός Έστω $h \in \mathbb{R}^m$ σταθερό. Αν η $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, λέμε ότι η $Df(a)(h)$ είναι η **κατευθυνόμενη παράγωγος της** f **στο** a**, κατά την κατεύθυνση του διανύσματος** h.

Προφανώς, η i–μερική παράγωγος της f στο a είναι η ειδική περίπτωση της κατευθυνόμενης παραγώγου της f στο a κατά την κατεύθυνση του e_i.

2 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

2.1. Ορισμός. Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **διαφορίσιμη στο** U. Τότε η απεικόνιση

$$Df : U \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : x \mapsto Df(x)$$

λέγεται **(ολικό) διαφορικό** ή **(ολική) παράγωγος της** f.

Αφού ο $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ είναι ευκλείδειος χώρος, ιδιαιτέρως,

$$L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

η Df μπορεί να είναι συνεχής, ή διαφορίσιμη.

Θα λέμε ότι η f είναι **διαφορίσιμη τάξης** $\mathcal{C}^1$ (ή απλά ότι **η** f **είναι τάξης** $\mathcal{C}^1$), αν η f είναι διαφορίσιμη στο U και Df είναι συνεχής.

Αν επιπλέον η Df είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, το διαφορικό της Df στο a, δηλ. η γραμμική απεικόνιση

$$D^2 f(a) := D(Df)(a) : \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

λέγεται **δεύτερη παράγωγος της** f **στο** a. Αυτή η απεικόνιση, αν υπάρχει, ικανοποιεί την σχέση

$$D^2 f(a) \in L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \cong L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n),$$

όπου $L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ συμβολίζει τον χώρο όλων των διγραμμικών απεικονίσεων $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Αν $D^2 f(a)$ υπάρχει για κάθε $a \in U$, τότε ορίζεται το **δεύτερο διαφορικό** (ή **δεύτερη παράγωγος**) **της** f, δηλ. η απεικόνιση

$$D^2 f : U \to L_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n).$$

Αν η $D^2 f$ είναι συνεχής, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη τάξης** $\mathcal{C}^2$.

Με ανάλογο τρόπο, ορίζουμε το k–διαφορικό $D^k f : U \to L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ και την k–παράγωγο της f στο a, δηλ. την απεικόνιση

$$D^k f(a) \in L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \dots) \dots)) \cong L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n).$$

Αν η $D^k f$ είναι συνεχής, τότε η f λέγεται **διαφορίσιμη τάξης** $\mathcal{C}^k$. Αν η f είναι τάξης $\mathcal{C}^k$, για κάθε $k = 1, 2, \dots$, τότε λέμε ότι **η** f **είναι διαφορίσιμη τάξης** $\mathcal{C}^\infty$.

2.2. Πρόταση. *Για μια διαφορίσιμη απεικόνιση* $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *τάξης* $\mathcal{C}^k$, *το* k*-διαφορικό* $D^k f(a) \in L_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ *είναι* ***συμμετρικό***. *Δηλ. για κάθε* $(h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, *έχουμε*

$$D^k f(a)(h_1, \dots, h_k) = D^k f(a)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}),$$

για κάθε μετάθεση σ *των δεικτών.*

Αν μια απεικόνιση $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $a \in U$, λαμβάνοντας υπ' όψιν το Θεώρημα 1.15, βλέπουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}|_a$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ υπάρχουν. Ιδιαιτέρως, αν η f είναι C^1, τότε οι προηγούμενες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Αλλά, αντίστροφα, η ύπαρξη των μερικών παραγώγων **δεν** συνεπάγεται την ύπαρξη του $Df(a)$. Όμως, αν οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς, τότε η $Df(a)$ επίσης υπάρχει, και η f είναι τάξης C^1.

Επειδή κάθε $f_j : U \to \mathbb{R}$, με $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, είναι μια απεικόνιση m μεταβλητών, αν η f είναι παντού διαφορίσιμη, μπορούμε να θεωρούμε την απεικόνιση

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} : U \ni a \longmapsto \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_a \in \mathbb{R}.$$

Αυτή η απεικόνιση μπορεί να έχει μερικές παραγώγους σε κάποιο σημείο $a \in U$, δηλ. μπορεί να υπάρχουν οι

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\Big|_a \equiv \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}\Big|_a, \quad k = 1, \dots, n.$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη τάξης 2 (αντ. C^2–διαφορίσιμη), τότε όλες οι **μερικές παράγωγοι τάξης 2**, δηλ., όλες οι $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}|_a$, $i, k = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, ύπαρχουν, για κάθε $a \in U$ (αντ. όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης 2 ύπαρχουν, και είναι συνεχείς). Αντίστροφα, αν οι μερικές παράγωγοι τάξης 2 ύπαρχουν και είναι συνεχείς, τότε και η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^2.

Αναλογα έχουμε τις μερικές παραγώγους τάξης p, για κάθε $p = 1, 2, \dots$. Έχουμε το επόμενο

2.3. Θεώρημα. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{R}^n$ και $a \in U$. Τότε η f είναι C^∞-διαφορίσιμη, αν και μόνον αν οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς.*

2.4. Ορισμός. Έστω $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, $f : U \to V$. Η f λέγεται $\mathcal{C}^k$–**αμφιδιαφόριση**, αν είναι C^k–διαφορίσιμη και αντιστρέψιμη, και και η αντίστροφη $f^{-1} : V \to U$ είναι επίσης $\mathcal{C}^k$-διαφορίσιμη.

2.5. Θεώρημα (Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης). *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{R}^n$ μια $\mathcal{C}^p$-διαφορίσιμη απεικόνιση ($p \geq 1$). Αν η παράγωγος $Df(a_o)$ της f σε κάποιο $a_o \in U$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τότε υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U_o του a_o με $U_o \subseteq U$ και μια ανοιχτή περιοχή V_o του $f(a_o)$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι επόμενες συνθήκες:*

$i)$ Ο περιορισμός της f στο U_o είναι 1-1 και $f(U_o) = V_o$ (επομένως, $f|_{U_o} : U_o \to V_o$ είναι 1-1 και επί).

$ii)$ Η αντίστροφη της $f|_{U_o}$

$$(f|_{U_o})^{-1} : V_o \to U_o$$

είναι $\mathcal{C}^p$-διαφορίσιμη (επομένως, η $f|_{U_o}$ είναι $\mathcal{C}^p$-αμφιδιαφόριση).

$iii)$ Για κάθε $a \in U_o$,

$$Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}. \tag{21}$$

2.6. Πόρισμα. *Αν $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτά, μια απεικόνιση $f : U \to V$ είναι $\mathcal{C}^k$-αμφιδιαφόριση, αν είναι $\mathcal{C}^k$-διαφορίσιμη, 1-1 και επί του V, και $Df(x)$ είναι αντιστρέψιμη, για κάθε $x \in U$.*