# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β
# ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

## 1 Τοπολογικοί Χώροι

**1.1. Ορισμός.** Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Μια οικογένεια υποσυνόλων του $X$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, λέγεται **τοπολογία** του $X$, αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

($i$) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

($ii$) Αν $A, B \in \mathcal{T}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{T}$.

($iii$) Αν $A_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, τότε $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **τοπολογικός χώρος** και τα σύνολα που ανήκουν στην τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγονται **ανοιχτά** υποσύνολα του $X$.

**1.2. Παράδειγμα.** Τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ αποτελούν τοπολογία.

**1.3. Πρόταση-Κριτήριο** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα $A \subseteq X$ είναι ανοιχτό, αν και μόνον αν ισχύει η παρακάτω συνθήκη:*

*για κάθε $x \in A$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε $x \in B_x \subseteq A$.*

**1.4. Ορισμός.** Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Μια υποοικογένεια $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ λέγεται **βάση** της τοπολογίας $\mathcal{T}$, αν ισχύει η συνθήκη

*για κάθε $A \in \mathcal{T}$ και κάθε $x \in A$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $x \in B \subseteq A$,*

που είναι ισοδύναμη με την συνθήκη

*κάθε $A \in \mathcal{T}$ είναι ένωση συνόλων της οικογένειας $\mathcal{B}$.*

**1.5. Παράδειγμα.** Οι ανοιχτές μπάλες $B(x, \varepsilon)$ με $x \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$ αποτελούν βάση της τοπολογίας του $\mathbb{R}^n$.

**1.6. Ορισμός.** Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ονομάζουμε **περιοχή** του $x$ κάθε σύνολο $A \subseteq X$ για το οποίο υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U \subseteq A$.

# 2 Συνεχείς Απεικονίσεις

**2.1. Ορισμός.** Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$ μια απεικόνιση και $x_o \in X$. Λέμε ότι η $f$ είναι **συνεχής στο** $x_o$, αν για κάθε ανοιχτό $B \in \mathcal{T}_Y$ με $f(x_o) \in B$, υπάρχει ανοιχτό $A \in \mathcal{T}_X$ με $x_o \in A$ και $f(A) \subseteq B$.

Η $f$ λέγεται **συνεχής**, αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

**2.2. Πρόταση.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση. Η $f$ είναι συνεχής, αν αντιστρέφει τα ανοιχτά υποσύνολα του $Y$ σε ανοιχτά υποσύνολα του $X$, δηλ. αν*

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X, \quad \forall\, V \in \mathcal{T}_Y.$$

**2.3. Ορισμός.** Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση. Λέμε ότι η $f$ είναι **ομοιομορφισμός**, αν είναι 1–1 και επί, συνεχής, και η αντίστροφή της είναι επίσης συνεχής. Δηλ. αν είναι αντιστρέψιμη και

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &\in \mathcal{T}_X, \quad \forall\, V \in \mathcal{T}_Y, \text{ και} \\ f(U) = (f^{-1})^{-1}(U) &\in \mathcal{T}_Y, \quad \forall\, U \in \mathcal{T}_X. \end{aligned}$$

# 3 Υπόχωροι και Χώροι-γινόμενα

**3.1. Πρόταση & Ορισμός.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Η οικογένεια*

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap U \;:\; U \in \mathcal{T}\}$$

*είναι μια τοπολογία επί του $A$, που λέγεται* **σχετική τοπολογία** *επί του $A$, επαγόμενη από την $\mathcal{T}$, και ο τοπολογικός χώρος $(A, \mathcal{T}_A)$ λέγεται* **τοπολογικός υπόχωρος** *του $(X, \mathcal{T})$.*

*Στην ειδική περίπτωση που $A$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $X$, ισχύει*

$$\mathcal{T}_A = \{U \in \tau \ : \ U \subseteq A\}.$$

**3.1. Πρόταση.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Η σχετική τοπολογία $\mathcal{T}_A$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο $A$ που κάνει συνεχή την κανονική εμφύτευση*

$$i_A : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (X, \mathcal{T}) : a \longmapsto i_A(a) = a.$$

**3.2. Ορισμός.** Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Ένα $U \subseteq X \times Y$ λέγεται **ανοιχτό**, αν για κάθε $(x, y) \in U$, υπάρχουν $A \in \mathcal{T}_X$ και $B \in \mathcal{T}_Y$ με

$$(x, y) \in A \times B \subseteq U.$$

**3.3. Πρόταση & Ορισμός.** *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Τα ανοιχτά υποσύνολα του $X \times Y$ αποτελούν μια τοπολογία $\mathcal{T}_\gamma$ στον $X \times Y$, που λέγεται* **τοπολογία-γινόμενο**. *Η $\mathcal{T}_\gamma$ είναι η μικρότερη τοπολογία στον $X \times Y$ που κάνει συνεχείς τις προβολές*

$$p_X : (X \times Y, \mathcal{T}_\gamma) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X) : (x, y) \longmapsto x,$$
$$p_Y : (X \times Y, \mathcal{T}_\gamma) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y) : (x, y) \longmapsto y.$$