ΜΑΘΗΜΑ 02

1 Άτλαντες

1.1 Ορισμός. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$$

μια οικογένεια από χάρτες του M. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ λέγεται $\mathcal{C}^k$–**άτλαντας του** M, αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

1) $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι μια κάλυψη του M, και

2) γιά κάθε $i, j \in I$, οι χάρτες $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί.

Ένας $\mathcal{C}^0$–άτλαντας του M θα λέγεται **τοπολογικός άτλαντας**, ενώ ένας $\mathcal{C}^\infty$–άτλαντας θα λέγεται **διαφορικός άτλαντας**.

Αν όλοι οι χάρτες ενός άτλαντα $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση $m \in \mathbb{N}$, ο $\mathcal{A}$ ονομάζεται m–**διάστατος**.

1.2 Παραδείγματα. Παρακάτω αναφερόμαστε πάλι στα Παραδείγματα 1.2 του Μαθήματος 01.

(Α) Για κάθε ανοιχτό $A \subseteq \mathbb{R}^m$, το μονοσύνολο

$$\mathcal{A} = \{(A, \mathrm{id}_A)\}$$

είναι ένας m–διάστατος διαφορικός άτλαντας του A.

(Β) Έστω V ένας n–διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ ένας γραμμικός ισομορφισμός. Το μονοσύνολο

$$\mathcal{A} := \{(V, \psi)\}$$

είναι ένας n–διάστατος διαφορικός άτλαντας του V.

(Γ) Αν $S \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική επιφάνεια και $\{(U_i, r_i, W_i) : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια από κανονικές παραμετρήσεις της S, έτσι ώστε $\{W_i\}_{i\in I}$ να είναι μια ανοιχτή κάλυψη της S, τότε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{(W_i, r_i^{-1}) \ : \ i \in I\}$$

είναι ένας 2–διάστατος διαφορικός άτλαντας της S.

(Δ) Οι οικογένειες

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{(U_N, \phi_N),\ (U_S, \phi_S)\},\\ \mathcal{B} &:= \{(U_i^a, \phi_i^a) \mid a = +, - \text{ και } i = x, y\},\\ \mathcal{C} &:= \{(U_N, \theta_N),\ (U_S, \theta_S)\}\end{aligned}$$

είναι 1–διάστατοι διαφορικοί άτλαντες του μοναδιαίου κύκλου.

(Ε) Αντίστοιχα με τον κύκλο, οι οικογένειες

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{(U_N, \phi_N),\ (U_S, \phi_S)\},\\ \mathcal{B} &:= \{(U_i^a, \phi_i^a) \mid a = +, - \text{ και } i = x, y, z\}\end{aligned}$$

είναι 2–διάστατοι διαφορικοί άτλαντες της μοναδιαίας σφαίρας.

(Ζ) Το σύνολο

$$\mathcal{A} := \{(U_i, \phi_i) : i = 1, 2, 3\}$$

είναι 2–διάστατος διαφορικός άτλαντας του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{A}_m^k(M)$ το σύνολο όλων των m–διάστατων $\mathcal{C}^k$–ατλάντων επί ενός συνόλου $M \neq \emptyset$.

1.3 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m^k(M)$. Θα λέμε ότι ο $\mathcal{A}$ είναι **μικρότερος** του $\mathcal{B}$ και θα γράφουμε $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, αν ο $\mathcal{A}$ περιέχεται (συνολοθεωρητικά) στον $\mathcal{B}$. Δηλαδή,

(1) $$\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}.$$

Είναι φανερό ότι

η σχέση (1) ορίζει μιά μερική διάταξη στο $\mathfrak{A}_m^k(M)$.

1.4 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m^k(M)$. Θα λέμε ότι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι $\mathcal{C}^k$–**συμβιβαστοί** και θα γράφουμε $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B}$, αν η οικογένεια $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ είναι ένας $\mathcal{C}^k$–άτλαντας, δηλαδή,

(2) $$\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m^k(M).$$

Η ένωση δύο $\mathcal{C}^k$–ατλάντων είναι πάντοτε μια κάλυψη του M. Από την άλλη μεριά, αν $(U,\phi),(V,\psi)\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$, τότε είτε οι δύο χάρτες ανήκουν στον ίδιο άτλαντα, ή ο ένας ανήκει στον $\mathcal{A}$ και ο άλλος ανήκει στον $\mathcal{B}$. Στην πρώτη περίπτωση, η συμβιβαστότητά τους εξασφαλίζεται από τον Ορισμό 1.1, επομένως αρκεί να ελέγξουμε την συμβιβαστότητα στην δεύτερη περίπτωση. Άρα,

> $\mathcal{A}\overset{k}{\sim}\mathcal{B}$, *αν και μόνον αν, κάθε χάρτης του* $\mathcal{A}$ *είναι* $\mathcal{C}^k$*–συμβιβαστός με κάθε χάρτη του* $\mathcal{B}$.

Ακόμη σημειώνουμε ότι αν $\mathcal{A}\leq\mathcal{B}$, τότε $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}=\mathcal{B}\in\mathfrak{A}^k_m(M)$, δηλαδή,

> *η σχέση διάταξης* (1) *συνεπάγεται την σχέση συμβιβαστότητας* (2).

1.5 Πρόταση. *Στο σύνολο* $\mathfrak{A}^k_m(M)$*, η σχέση (2) είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η σχέση $\overset{k}{\sim}$ είναι προφανώς αυτοπαθής και συμμετρική. Έστω τώρα $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}\in\mathfrak{A}^k_m(M)$ με $\mathcal{A}\overset{k}{\sim}\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}\overset{k}{\sim}\mathcal{C}$. Θα δείξουμε ότι η σχέση (2) είναι μεταβατική, δηλαδή, $\mathcal{A}\overset{k}{\sim}\mathcal{C}$.

Έστω $(U,\phi)\in\mathcal{A}$ και $(W,\chi)\in\mathcal{C}$ με $U\cap W\neq\emptyset$.

Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι $\phi(U\cap W),\chi(U\cap W)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$. Για να δείξουμε ότι $\phi(U\cap W)$ είναι ανοιχτό, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $a\in\phi(U\cap W)$, υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο B του $\mathbb{R}^m$, με

$$a\in B\subseteq\phi(U\cap W).$$

Θεωρούμε λοιπόν ένα $a\in\phi(U\cap W)$ και θέτουμε $x:=\phi^{-1}(a)\in U\cap W$. Επειδή οι χάρτες του $\mathcal{B}$ καλύπτουν το M, υπάρχει $(V,\psi)\in\mathcal{B}$ με $x\in V$, επομένως $x\in A:=U\cap V\cap W$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\phi(A)=\phi(U\cap V\cap W)&=(\phi\circ\psi^{-1})(\psi(U\cap V\cap W))=\\&=(\phi\circ\psi^{-1})(\psi(U\cap V)\cap\psi(V\cap W)).\end{aligned}$$

Οι χάρτες (U,ϕ) και (V,ψ) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί από την υπόθεση, επομένως το $\psi(U\cap V)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Όμοια, το $\psi(V\cap W)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, λόγω της συμβιβαστότητας των (V,ψ) και (W,χ). Επομένως, $\phi(A)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, ως εικόνα του ανοιχτού $\psi(U \cap V) \cap \psi(V \cap W)$ μέσω του ομοιομορφισμού $\phi \circ \psi^{-1}$. Επειδή ισχύει $a \in \phi(A) \subseteq \phi(U \cap W)$, θέτοντας $B := \phi(A)$, έχουμε την ζητούμενη σχέση, επομένως $\phi(U \cap W)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Ανάλογα, δείχνουμε ότι $\chi(U \cap W)$ είναι επίσης ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Κατόπιν πρέπει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς

$$\chi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \longrightarrow \chi(U \cap W) \tag{5}$$

$$\phi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap W) \longrightarrow \phi(U \cap W) \tag{6}$$

είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμες. Δείχνουμε την διαφορισιμότητα της πρώτης (με ανάλογο τρόπο δείχνουμε και την διαφορισιμότητα της δεύτερης). Επειδή η διαφορισιμότητα είναι μια τοπική ιδιότητα, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $a \in \phi(U \cap V)$, υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο B του $\phi(U \cap V)$, τέτοιο ώστε $a \in B$ και ο περιορισμός της $\psi \circ \phi^{-1}$ στο B, δηλαδή η απεικόνιση $\psi \circ \phi^{-1}|_B$, είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη.

Όπως πριν, θεωρούμε τον χάρτη $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x := \phi^{-1}(a) \in V$ και την τομή $A := U \cap V \cap W \ni x$. Δείξαμε πριν ότι οι εικόνες $\phi(A)$ και $\chi(A) = \chi(U \cap W) \cap \chi(V \cap W)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$. Από την άλλη μεριά, η $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των χαρτών $(U, \phi), (V, \psi)$ και $(V, \psi), (W, \chi)$ συνεπάγεται την $\mathcal{C}^k$–διαφορισιμότητα των απεικονίσεων

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi^{-1} &: \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V), \\ \chi \circ \psi^{-1} &: \psi(V \cap W) \to \chi(V \cap W). \end{aligned}$$

Σαν αποτέλεσμα, οι περιορισμοί των προηγούμενων απεικονίσεων στα $\phi(A)$, $\psi(A)$ αντίστοιχα, είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμες απεικονίσεις της μορφής

$$\psi \circ \phi^{-1}|_{\phi(A)} : \phi(A) \to \psi(A), \quad \chi \circ \psi^{-1}|_{\psi(A)} : \psi(A) \to \chi(A).$$

Επομένως, η σύνθεσή τους

$$\chi \circ \phi^{-1}|_{\phi(A)} = (\chi \circ \psi^{-1}|_{\psi(A)}) \circ (\psi \circ \phi^{-1}|_{\phi(A)})$$

είναι $\mathcal{C}^k$–απεικόνιση. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι η $\chi \circ \phi^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη στην περιοχή $B = \phi(A)$ του a, που σημαίνει ότι η (5) είναι επίσης $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη.

Άρα έχουμε αποδείξει την $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των χαρτών (U, ϕ), (V, ψ), επομένως και την $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των ατλάντων $\mathcal{A}$ και $\mathcal{C}$. □

2 Πολλαπλότητες

2.1 Ορισμός. Ένας (m–διάστατος) $\mathcal{C}^k$–άτλαντας $\mathcal{A}$ επί του M ονομάζεται **μέγιστος**, αν είναι ένα μεγιστικό στοιχείο του $\mathfrak{A}^k_m(M)$, ως προς την διάταξη (1), δηλαδή, αν

$$\mathcal{B} \in \mathfrak{A}^k_m(M),\ \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \implies \mathcal{A} = \mathcal{B}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$ είναι μέγιστος και ότι (U, ϕ) είναι ένας (m-διάστατος) χάρτης επί του M, που είναι $\mathcal{C}^k$-συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}$. Τότε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$, επομένως από τον ορισμό του μέγιστου άτλαντα, $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\}$, δηλαδή $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{A}$ περιέχει κάθε χάρτη συμβιβαστό με όλους τους χάρτες του $\mathcal{A}$, και έστω $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$. Τότε, αφού $\mathcal{B}$ είναι ένας άτλαντας, κάθε χάρτης του $\mathcal{B}$ είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστός με κάθε άλλο χάρτη του $\mathcal{B}$, επομένως με όλους τους χάρτες του $\mathcal{A}$, οπότε, από την υπόθεση, κάθε χάρτης του $\mathcal{B}$ ανήκει στον $\mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, και τελικά $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Έχουμε έτσι αποδείξει ότι

> *Ένας άτλαντας $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$ είναι μέγιστος, αν και μόνον αν, για κάθε χάρτη (U, ϕ) του M, που είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}$, έχουμε ότι $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.*

Έστω τώρα ένας $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$ και η κλάση $[\mathcal{A}]$ ως προς την σχέση ισοδυναμίας (2). Θεωρούμε την ένωση $\mathcal{A}^*$ όλων των ατλάντων $\mathcal{B}$ που είναι ισοδύναμοι (: $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί) με τον $\mathcal{A}$, δηλ.

$$\mathcal{A}^* := \bigcup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} \mathcal{B}. \tag{7}$$

Τότε:

(1) *Ο $\mathcal{A}^*$ είναι άτλαντας.* Πράγματι, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ και ο $\mathcal{A}$ είναι κάλυψη του M, άρα και ο $\mathcal{A}^*$ είναι κάλυψη. Έστω $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2) \in \mathcal{A}^*$. Τότε υπάρχουν άτλαντες $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in [\mathcal{A}]$, με $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{B}_1$ και $(U_2, \phi_2) \in \mathcal{B}_2$. Επειδή $\mathcal{B}_1 \overset{k}{\sim} \mathcal{A}$ και $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B}_2$, από την μεταβατικότητα της $\overset{k}{\sim}$, έχουμε $\mathcal{B}_1 \overset{k}{\sim} \mathcal{B}_2$ και οι (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί. Άρα ο $\mathcal{A}^*$ είναι ένας m–διάστατος $\mathcal{C}^k$–άτλαντας επί του M.

(2) *Ο $\mathcal{A}^*$ είναι μεγαλύτερος του $\mathcal{A}$.* Είναι προφανές, αφού $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}]$, προκύπτει ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ (άρα και $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}^*$, δηλ. $\mathcal{A}^* \in [\mathcal{A}]$).

(3) *Ο $\mathcal{A}^*$ είναι μέγιστος.* Πράγματι, έστω $\mathcal{C} \in \mathfrak{A}^k_m$ με $\mathcal{A}^* \leq \mathcal{C}$. Τότε $\mathcal{C} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}^* \overset{k}{\sim} \mathcal{A}$, δηλ. $\mathcal{C} \in [\mathcal{A}]$ και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}^*$. Άρα $\mathcal{C} = \mathcal{A}^*$.

(4) *Ο $\mathcal{A}^*$ είναι ο μοναδικός μέγιστος άτλαντας στο $\mathfrak{A}^k_m$ που περιέχει τον $\mathcal{A}$.* Πράγματι: Έστω $\mathcal{D}$ ένας μέγιστος άτλαντας, με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$. Τότε $\mathcal{D} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}$, άρα $\mathcal{D} \in [\mathcal{A}]$ και $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}^*$. Όμως $\mathcal{D}$ μέγιστος, και ο τελευταίος εγκλεισμός μας δίνει $\mathcal{D} = \mathcal{A}^*$.

Τα ανωτέρω έχουν αποδείξει το επόμενο

2.2 Θεώρημα. *Για κάθε $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$, υπάρχει ένα μοναδικός μέγιστος άτλαντας $\mathcal{A}^* \in \mathfrak{A}^k_m(M)$, με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$.* □

Αξίζει να δούμε και μια δεύτερη περιγραφή του μέγιστου που περιέχει ένα δεδομένο άτλαντα $\mathcal{A}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}'$ το σύνολο όλων των m–διάστατων χαρτών του M, που είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί με όλους τους χάρτες του $\mathcal{A}$. Προφανώς $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}'$ είναι ένας $\mathcal{C}^k$–άτλαντας. Είναι άμεσο ότι οι χάρτες του αποτελούν κάλυψη του M. Γιά την συμβιβαστότητα των χαρτών του, θεωρούμε δύο τυχαίους χάρτες $(U,\phi),(V,\psi) \in \mathcal{A}'$. Επειδή αυτοί οι χάρτες είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}$, οι οικογένειες $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \cup \{(U,\phi)\}$ και $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A} \cup \{(V,\psi)\}$ ανήκουν στο $\mathfrak{A}^k_m(M)$, και $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}_1$, όπως και $\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{A}_2$. Λόγω της μεταβατικότητας της $\overset{k}{\sim}$, έχουμε $\mathcal{A}_1 \overset{k}{\sim} \mathcal{A}_2$, επομένως οι χάρτες (U,ϕ) και (V,ψ) του $\mathcal{A}'$ είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί και ο $\mathcal{A}'$ είναι ένας m–διάστατος $\mathcal{C}^k$–άτλαντας.

Θα δείξουμε τώρα, ότι $\mathcal{A}'$ είναι μέγιστος. Πράγματι, αν (U,ϕ) είναι χάρτης του M, $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστός με τους χάρτες του $\mathcal{A}'$, τότε (U,ϕ) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστός με τους χάρτες του $\mathcal{A}$ (αφού $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$), επομένως, σύμφωνα με το ορισμό του $\mathcal{A}'$, έχουμε ότι $(U,\phi) \in \mathcal{A}'$, δηλαδή $\mathcal{A}'$ είναι μέγιστος.

Η μοναδικότητα του μέγιστου που περιέχει τον $\mathcal{A}$, από το Θεώρημα 2.2, μας εξασφαλίζει ότι

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}^*. \tag{8}$$

Επίσης, από τον ορισμό του άτλαντα $\mathcal{A}^*$, έχουμε ότι για κάθε $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]$, ισχύει

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*.$$

Αντίστροφα, αν $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$, τότε οι χάρτες του $\mathcal{A}$ και οι χάρτες του $\mathcal{B}$ ανήκουν στον ίδιο άτλαντα $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$, δηλαδή, είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί μεταξύ τους. Αρα,

$\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B}$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{A} \overset{k}{\sim} \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*. \tag{9}$$

2.3 Ορισμός. Λέμε ότι ένας μέγιστος άτλαντας $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^k_m(M)$ ορίζει μια $\mathcal{C}^k$–**διαφορική δομή επί του** M, και ότι το ζεύγος $(M, \mathcal{A})$ είναι μια $\mathcal{C}^k$–**πολλαπλότητα**. Αν όλοι οι χάρτες του $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση m, λέμε ότι η m είναι **η διάσταση της πολλαπλότητας** και ότι το χώρος $\mathbb{R}^m$ είναι το **μοντέλο της πολλαπλότητας**.

Ιδιαιτέρως, αν $k = 0$, λέμε ότι η $(M, \mathcal{A})$ είναι μια **τοπολογική πολλαπλότητα**· αν $k = \infty$, λέμε ότι είναι μια **διαφορική πολλαπλότητα**.

Αν είναι σαφές ποιός άτλαντας ορίζει τη διαφορική δομή, λέμε (και γράφουμε) "η πολλαπλότητα M".

2.4 Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ είναι n–διάστατος ολικός χάρτης του $\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ είναι n–διάστατος διαφορικός άτλαντας του $\mathbb{R}^n$. Άρα θεωρώντας τον αντίστοιχο μέγιστο $\mathcal{A}^*$ παίρνουμε μια διαφορική πολλαπλότητα $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}^*)$. Θα αναφερόμαστε σε αυτήν ως την *συνήθη διαφορική δομή του* $\mathbb{R}^n$.

2.5 Παρατήρηση. Η σημασία του Θεωρήματος 2.2 είναι προφανής. Για να ελέγξουμε αν ένα σύνολο M είναι πολλαπλότητα (δηλαδή, αν έχει ένα μέγιστο άτλαντα), αρκεί να βρούμε ένα (μη μέγιστο) άτλαντα· τότε ο αντίστοιχος μέγιστος άτλαντας ορίζει τη ζητούμενη δομή πολλαπλότητας.

2.6 Παρατήρηση. (1) Είναι αποτέλεσμα της Διαφορικής Τοπολογίας, ότι αν ένας χώρος M έχει ένα $\mathcal{C}^k$-άτλαντα, $k \geq 1$, τότε έχει επίσης και ένα $\mathcal{C}^{k+1}$-άτλαντα. Αυτό δεν αληθεύει γιά $k = 0$, δηλαδή αν ο αρχικός άτλαντας είναι τοπολογικός.

(2) Ένας μέγιστος τοπολογικός άτλαντας μπορεί να περιέχει πολλούς μέγιστους διαφορικούς άτλαντες.

2.7 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ $\mathcal{C}^k$-πολλαπλότητες διαστάσεων m και n, αντίστοιχα. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $M \times N$ δέχεται τη δομή μιας $(m+n)$-διάστατης $\mathcal{C}^k$-πολλαπλότητας.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{C} := \{(U \times V,\ \phi \times \psi) : (U, \phi) \in \mathcal{A},\ (V, \psi) \in \mathcal{B}\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{C}$ είναι ένας $\mathcal{C}^k$–άτλαντας του $M \times N$, διάστασης $m+n$.

Πράγματι, κάθε $(U \times V,\, \phi \times \psi)$ είναι ένας χάρτης του $M \times N$, διότι η απεικόνιση

$$\phi \times \psi : U \times V \to \phi(U) \times \psi(V) : (x,y) \mapsto (\phi(x), \psi(y))$$

είναι 1–1 σαν καρτεσιανό γινόμενο 1–1 απεικονίσεων και η εικόνα της $\phi(U) \times \psi(V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ σαν ένα καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών συνόλων.

Ακόμη, οι χάρτες του $\mathcal{C}$ καλύπτουν το $M \times N$: αν $(x,y) \in M \times N$, τότε υπάρχουν $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ και $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$ και $y \in V$, επομένως $(x,y) \in U \times V$.

Τέλος, κάθε δύο χάρτες του $\mathcal{C}$ είναι συμβιβαστοί: πράγματι, αν

$$(U_1 \times V_1, \phi_1 \times \psi_1),\ (U_2 \times V_2,\ \phi_2 \times \psi_2) \in \mathcal{C},$$

με $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \emptyset$, τότε $U_1 \cap U_2,\ V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ και

$$\begin{aligned} &(\phi_1 \times \psi_1)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) = \\ &= \phi_1(U_1 \cap U_2) \times \psi_1(V_1 \cap V_2) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &(\phi_2 \times \psi_2)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) = \\ &= \phi_2(U_1 \cap U_2) \times \psi_2(V_1 \cap V_2) \end{aligned} \tag{10$'$}$$

είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, σαν καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών συνόλων και η απεικόνιση μεταφοράς

$$(\phi_2 \times \psi_2) \circ (\phi_1 \times \psi_1)^{-1} = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})\ \times\ (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$$

που στέλνει το σύνολο (10) στο σύνολο (10′) είναι $\mathcal{C}^k$–αμφιδιαφόριση, σαν καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{C}^k$–αμφιδιαφορίσεων.

Άρα ο $\mathcal{C}$ είναι $\mathcal{C}^k$–άτλαντας του $M \times N$ και ο αντίστοιχος μέγιστος $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}'$ ορίζει στο $M \times N$ δομή $\mathcal{C}^k$–πολλαπλότητας. □