ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ-ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Ιάσονας Ασκούνης

ΙΟΥΝΙΟΣ 2023

Βασικό Υλικό

1 ΘΕΩΡΙΑ

Πρόταση 1 (Ανισότητα Markov)**.** *Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή,δηλαδή $X \geq 0$.Τότε για κάθε $a > 0$ ισχύει η ανισότητα:*

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Απόδειξη 1. *Παρατηρούμε ότι για $a > 0$*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^a x f_X(x) dx + \int_a^{+\infty} x f_X(x) dx \geq \int_a^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$\geq a \int_a^{+\infty} f_X(x) dx = aP(X \geq a)$$

και άρα διαιρώντας με a στην τελευταία ανισότητα έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 2 (Ανισότητα Chebyshev)**.** *Αν X είναι τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2) < \infty$ τότε για κάθε $a > 0$ ισχύει η ανισότητα:*

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Πρόταση 3. *Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $Z = X - \mathbb{E}(X)$ τότ έχουμε ότι για κάθε $a > 0$*

$$P(|Z| > a) = P(Z^2 > a^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Z^2)}{a^2} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]}{a^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

απο ανισότητα Markov για την τυχαία μεταβλητή Z.

Ορισμός 1 (Σύγκλιση κατά πιθανότητα). *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και έστω και X μια άλλη τυχαία μεταβλητή.Λέμε ότι η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στην X και το συμβολίζουμε με $X_n \xrightarrow{p} X$ αν ισχύει ότι:*
για κάθε $\epsilon > 0$

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Θεώρημα 1 (Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών). *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$.Τότε*

$$\overline{X_n} \xrightarrow{p} \mu = \mathbb{E}(X_1)$$

και άρα δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$

$$P(|\overline{X_n} - \mu| > \epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ορισμός 2 (Σύγκλιση με πιθανότητα 1). *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και έστω και X μια άλλη τυχαία μεταβλητή.Λέμε ότι η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει με πιθανότητα 1 στην X και το συμβολίζουμε με $X_n \xrightarrow{as} X$ αν ισχύει ότι:*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1.$$

Πρόταση 4. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και έστω και X μια άλλη τυχαία μεταβλητή.*
Τότε

$$X_n \xrightarrow{as} X \implies X_n \xrightarrow{p} X$$

Θεώρημα 2 (Ισχυρός Νόμος Μεγάλων Αριθμών). *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.Τότε*

$$\overline{X_n} \xrightarrow{as} \mu$$

δηλαδή

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = \mu\right) = 1$$

Ορισμός 3 (Σύγκλιση κατά κατανομή). *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και έστω και X μια άλλη τυχαία μεταβλητή.Λέμε ότι η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην X και το συμβολίζουμε με $X_n \xrightarrow{d} X$ άν για κάθε x που είναι σημείο συνέχειας της F_X ισχύει ότι*

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) \xrightarrow{n\to\infty} P(X \leq x) = F_X(x)$$

Θεώρημα 3 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα). *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών όπου $\mu = \mathbb{E}(X_1), \sigma^2 = \mathbb{V}(X_1) < \infty$.Ορίζουμε τώρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τις ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}.$$

Τότε έχουμε ότι

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

και άρα δηλαδή για κάθε $b \in \mathbb{R}$

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b\right) \xrightarrow{n\to\infty} P(Z \leq b), Z \sim N(0,1)$$

$$P\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \leq b\right) \xrightarrow{n\to\infty} P(Z \leq b), Z \sim N(0,1)$$

Πρόταση 5. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και έστω και X μια άλλη τυχαία μεταβλητή.*
Τότε

$$X_n \xrightarrow{as/p} X \implies X_n \xrightarrow{d} X.$$

2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. *Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών.Θεωρούμε τώρα την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $S_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ και δίνεται ότι $\mu = \mathbb{E}(X_1^2) = \frac{3}{10}, \sigma^2 = \mathbb{V}(X_1^2) = \frac{37}{700}$.Να βρεθεί η κατά προσέγγιση $P(7696 < S_{25900} < 7807)$.*
Δίνονται απο τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής οι τιμές: $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9773, \Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(3) = 0.9987$.

Λύση 1. *Παρατηρούμε αρχικά ότι οι X_i^2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές αφού οι X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.Επίσης έχουμε ότι*

$$25900\mu = 25900\frac{3}{10} = \frac{77700}{10} = 7770$$

$$\sqrt{25900\sigma^2} = \sqrt{25900\frac{37}{700}} = \sqrt{259\frac{37}{7}} = \sqrt{1369} = 37$$

και άρα

$$P(7696 < S_{25900} < 7807) = P\left(\frac{7696 - 7700}{37} < \frac{S_{25900} - 25900\mu}{\sqrt{25900\sigma^2}} < \frac{7807 - 7700}{37}\right)$$

$$= P\left(-\frac{4}{37} < \frac{S_{25900} - 25900\mu}{\sqrt{25900\sigma^2}} < \frac{107}{37}\right) \approx P\left(-\frac{4}{37} < Z < \frac{107}{37}\right) (Z \sim N(0,1))$$

$$= \Phi\left(\frac{107}{37}\right) - \Phi\left(-\frac{4}{37}\right) \approx \Phi(3) - \Phi(-0.1) = \Phi(3) + \Phi(0.1) - 1$$

απο το ΚΟΘ και αφού η Φ ικανοποιεί την $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x), x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2. *Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή μ πεπερασμένη,και διασπορά σ^2 επίσης πεπερασμένη.Θέτουμε τώρα $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}$.Είναι γνωστό τώρα απο το ΚΟΘ ότι ισχύουν οι σχέσεις*

$$P(S_{100} > 100) = 0.6915$$

$$P(S_{400} \leq 1000) = 0.4013$$

Να υπολογιστούν η μέση τιμή μ και η διασπορά σ^2 των X_i.
Δίνονται απο τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής οι τιμές: $\Phi(0) = 0.5, \Phi(0.25) = 0.5987, \Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(0.888) = 0.813, \Phi(1.282) = 0.9, \Phi(2.533) = 0.9944$.

Λύση 2. *Παρατηρούμε ότι*

$$P(S_{100} > 100) = P\left(\frac{S_{100} - 100\mu}{\sqrt{100\sigma^2}} > \frac{100 - 100\mu}{\sqrt{100\sigma^2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{S_{100} - 100\mu}{\sqrt{100\sigma^2}} > \frac{10(1-\mu)}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \approx P\left(Z > \frac{10(1-\mu)}{\sqrt{\sigma^2}}\right) (Z \sim N(0,1)) = 1 - \Phi\left(\frac{10(1-\mu)}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{10(\mu-1)}{\sigma}\right) = 0.6915 = \Phi(0.5)$$

απο ΚΟΘ.Επομένως αφού τώρα η Φ *είναι αύξουσα και άρα 1-1 έπεται ότι*

$$\frac{10(\mu-1)}{\sigma} = 0.5 \implies 10\mu - 10 = 0.5\sigma \ (1).$$

Επίσης πάλι απο ΚΟϑ:

$$P(S_{400} \leq 1000) = P\left(\frac{S_{400} - 400\mu}{\sqrt{400\sigma^2}} \leq \frac{1000 - 400\mu}{\sqrt{400\sigma^2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{S_{400} - 400\mu}{\sqrt{400\sigma^2}} \leq \frac{50 - 20\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{50 - 20\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) (Z \sim N(0,1)) = \Phi\left(\frac{50 - 20\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{50 - 20\mu}{\sigma}\right) = 0.4013 = 1 - \Phi(0.25)$$

$$\implies \Phi\left(\frac{20\mu - 50}{\sigma}\right) = \Phi(0.25)$$

και άρα αφού η Φ *είναι 1-1 έπεται ότι*

$$\frac{20\mu - 50}{\sigma} = 0.25 \implies 20\mu - 50 = 0.25\sigma \ (2).$$

Λύνοντας τώρα το σύστημα εξισώσεων (1).,(2). βρίσκουμε ότι

$$\sigma = 40, \mu = 3 \implies \sigma^2 = 1600, \mu = 3$$

Άσκηση 3. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $\mu = \mathbb{E}(X_i) = 7$ και διασπορά $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i) = 2$.*

1. *Να αποδειχθεί ότι $P(X_1 \leq 3) \leq \frac{1}{8}$.*

2. *Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα $P(340 < X_1 + X_2 + \cdots + X_{50} < 370)$.*

Δίνονται απο τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής οι τιμές: $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9773, \Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(3) = 0.9987$.

Λύση 3. 1. *Παρατηρούμε αρχικά ότι απο ανισότητα Chebyshev για a=4 έχουμε ότι*

$$P(X_1 \leq 3) = P(X_1 - \mathbb{E}(X_1) \leq -4) \leq P(|X_1 - \mathbb{E}(X_1)| > 4) \leq \frac{\mathbb{V}(X_1)}{16} = \frac{1}{8}$$

2. *Θέτουμε $S_n = \sum_1^n X_i, n \in \mathbb{N}$ και έχουμε ότι*

$$P(340 < S_{50} < 370) = P\left(\frac{340-350}{\sqrt{100}} < \frac{S_{50} - 50\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{370-350}{\sqrt{100}}\right)$$

$$\approx P(-1 < Z < 2)(Z \sim N(0,1)) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0,8186.$$

Άσκηση 4. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή $\mu = 1$ και διασπορά $\sigma^2 = 2$.Θέτουμε $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}$.Να βρεθεί η ασυμπτωτική προσέγγιση της πιθανότητας $P(S_n > n)$ για μεγάλες τιμές του n. Δίνονται απο τον πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής οι τιμές:*$\Phi(0.5) = 0.692, \Phi(1) = 0.841, \Phi(1.5) = 0.933, \Phi(2) = 0.977, \Phi(2.5) = 0.994$.

Λύση 4. *Παρατηρούμε ότι απο ΚΟΘ*

$$P(S_n > n) = P(S_n - n > 0) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} > 0\right) \approx P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

όπου $Z \sim N(0,1)$.

Άσκηση 5. *Συμμετέχουμε σε ένα παιχνιδί όπου σε κάθε γύρο κερδίζουμε 1 ευρώ με πιθανότητα* $\frac{3}{4}$ *και χάνουμε το ποσό των 4 ευρώ με πιθανότητα* $\frac{1}{4}$*.Το αποτέλεσμα κάθε γύρου είναι ανεξάρτητο απο τα αποτελέσματα όλων των προηγούμενων.Ποιά ανισότητα πρέπει να ικανοποιεί το n ώστε η πιθανότητα μετά απο n γύρους του παιχνιδιού να χάνουμε περισσότερα απο 30 ευρώ να είναι μικρότερη απο 0.05.*
Δίνονται απο τον πίνακα της τυποποιήμενης κανονικής κατανομής οι εξής τιμές: $\Phi(0.05) = 0.52, \Phi(-1.65) = 0.05, \Phi(1.65) = 0.95$

Λύση 5. *Ορίζουμε αρχικά τις τυχαίες μεταβλητές* $X_i, i \in \mathbb{N}$ *όπου κάθε* X_i *συμβολίζει το αποτέλεσμα του παιχνιδιού την i ημέρα με τιμή 1 αν χάνουμε 4 ευρώ και τιμή 0 αν κερδίζουμε 1 ευρώ την i ημέρα.Οι* X_i *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και καθεμία ακολουθεί την Bernulli* $\left(\frac{1}{4}\right)$*.Επομένως έχουμε ότι* $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{4}, \mathbb{V}(X_i) = \frac{3}{16}$*.Τώρα ορίζουμε για κάθε* $i \in \mathbb{N}$ *τις* $S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$ *και ζητάμε την σχέση που πρέπει να ικανοποιεί το n ώστε*

$$P(S_n > 30) < 0.05.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι απο ΚΟΘ

$$P(S_n > 30) = P\left(\frac{S_n - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{3n}{16}}} > \frac{30 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{3n}{16}}}\right) \approx P\left(Z > \frac{30 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{3n}{16}}}\right) (Z \sim N(0.1))$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{30 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{3n}{16}}}\right) < 0.05 = 1 - \Phi(1.65)$$

$$\implies \Phi\left(\frac{30 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{3n}{16}}}\right) > \Phi(1.65)$$

και αφού η Φ *είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι πρέπει*

$$\frac{30 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{3n}{16}}} > 1.65.$$

Άσκηση 6. *Στην εξέταση του μαθήματος Πιθανότητες 1΄προσήλθαν 300 φοιτητές.Οι χρόνοι βαθμολόγησης των γραπτών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές όπου καθεμία έχει μέση τιμή 5 λεπτά και διασπορά* $\frac{4}{3}$ *λεπτά.Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος βαθμολόγησης να είναι 24 ώρες και 40 λεπτά.*
Δίνονται απο τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής οι εξής τιμές: $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9772$.

Λύση 6. *Αρχικά θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές* $(X_n), 1 \leq n \leq 300$ *όπου κάθε* X_n *εκφράζει τον χρόνο βαθμολόγησης του* n *γραπτού.Από υπόθεση έχουμε ότι* $\mathbb{E}(X_n) = 5, \mathbb{V}(X_n) = \frac{4}{3}$ *όπου και τα 2 μεγέθη είναι σε λεπτά.Ορίζουμε τώρα και τις τυχαίες μεταβλητές* $S_n = \sum_{i=1}^{n} Xi, 1 \leq n \leq 300$ *και ζητάμε την πιθανότητα*

$$P(S_{300} = 1480).$$

γιατί 24 ώρες και 40 λεπτά είναι $24 \cdot 60 + 40 = 1480$ *λεπτά.Τώρα παρατηρούμε ότι απο ΚΟΘ*

$$P(S_{300} = 1480) = P(S_{300} - 1500 = -20) = P\left(\frac{S_{300} - 1500}{\sqrt{400}} = \frac{-20}{\sqrt{400}}\right) \approx P(Z = -1) = 0.$$

γιατί η Z *είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.*

Άσκηση 7. *Έστω* X *τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή* $\mathbb{E}(X) = 3$ *και ροπή δεύτερης τάξης* $\mathbb{E}(X^2) = 13$*.Να αποδειχθεί ότι*

$$P(-2 \leq X \leq 8) \geq \frac{21}{25}.$$

Λύση 7. *Αρχικά παρατηρούμε ότι* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 13 - 9 = 4$.
Τώρα έχουμε ότι

$$P(-2 \leq X \leq 8) = P(-2-3 \leq X - \mathbb{E}(X) \leq 8-3) = P(-5 \leq X - \mathbb{E}(X) \leq 5) = P(|X - \mathbb{E}(X)| \leq 5)$$

$$= 1 - P(|X - \mathbb{E}(X)| > 5) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{25} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

όπου στην ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Chebyshev.

Άσκηση 8. *Ένας τοξοβόλος πρόκειται να πραγματοποιήσει n βολές, καθεμιά απο τις οποίες βαθμολογείται με έναν πραγματικο αριθμό απο το 0 εώς το 100.Θεωρούμε ότι οι βαθμοί των βολών είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μεταξύ τους και ισόνομες με μέση τιμή 80 και τυπική απόκλιση 10. Έστω S το άθροισμα των βαθμολογιών των n βολών.*

1. *Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του n ώστε $S \geq 8000$ με πιθανότητα προσεγγιστικά τουλάχιστον 0.5;*

2. *Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του n ώστε $S \geq 8000$ με πιθανότητα προσεγγιστικά τουλάχιστον 0.95;*

Δίνεται ότι $\Phi(0.95) = 0.82, \Phi(1.65) = 0.95$.

Λύση 8. *Αρχικά ορίζουμε τις τυχαιές μεταβλητές* $X_i, 1 \leq i \leq n$ *όπου καθεμία εκφράζει την βαθμολογία του τοξοβόλου στην i βολή.Έχουμε τώρα απο υπόθεση ότι οι* X_i *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και* $\mathbb{E}(X_i) = 80, \mathbb{V}(X_i) = 100$ *αφού* $\sigma_{X_i} = \sqrt{\mathbb{V}(X_i)} = 10$. *Θεωρούμε τώρα και τις τυχαίες μεταβλητές* $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i, 1 \leq k \leq n$.

1. *Ζητάμε το ελάχιστο n για το οποίο ισχύει ότι*

$$P(S_n \geq 8000) \geq 0.5.$$

Έχουμε απο ΚΟΘ

$$P(S_n \geq 8000) = P\left(\frac{S_n - 80n}{\sqrt{100n}} \geq \frac{8000 - 80n}{\sqrt{100n}}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{800 - 8n}{\sqrt{n}}\right) (Z \sim N(0,1))$$

$$1 - \Phi\left(\frac{800 - 8n}{\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{8n - 800}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.5 = \Phi(0)$$

$$\implies \Phi(0) \leq \Phi\left(\frac{8n - 800}{\sqrt{n}}\right)$$

και αφού η Φ *είναι αύξουσα συνάρτηση έπεται ότι πρέπει*

$$0 \leq \frac{8n - 800}{\sqrt{n}} \implies 8n \geq 800 \implies n \geq 100$$

και άρα ο ελάχιστος n είναι 100.

2. *Ζητάμε το ελάχιστο* n *για το οποίο ισχύει ότι*

$$P(S_n \geq 8000) \geq 0.95.$$

Έχουμε απο ΚΟΘ

$$P(S_n \geq 8000) = P\left(\frac{S_n - 80n}{\sqrt{100n}} \geq \frac{8000 - 80n}{\sqrt{100n}}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{800 - 8n}{\sqrt{n}}\right) (Z \sim N(0,1))$$

$$1 - \Phi\left(\frac{800 - 8n}{\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{8n - 800}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.65)$$

και αφού η Φ *είναι αύξουσα συνάρτηση έπεται ότι πρέπει*

$$1.65 \leq \frac{8n - 800}{\sqrt{n}}$$

και θεωρώντας τώρα την συνάρτηση $g(x) = 8x - 1.65\sqrt{x} - 800, x > 0$ *και ελαχιστοποιώντας την παίρνουμε σαν ελάχιστο* n *το ακέραιο μέρος του* x_0 *το σημείο ελαχίστου της* g.

3 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Άσκηση 9. *Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται απο τον τύπο:*

$$f(x) = e^{-2|x|}, x \in \mathbb{R}.$$

1. *Υπολογίστε την συνάρτηση κατανομής,την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,την μέση τιμή και την διασπορά της $Y = |X|$.*

2. *Υποθέτουμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_{64}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με την X.Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα*

$$P(24 < |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_{64}| < 36).$$

Δίνονται απο τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής οι εξής τιμές:$\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9773, \Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(3) = 0.9987$.

Λύση 9. 1. *Αρχικά για την συνάρτηση κατανομής της Y έχουμε ότι για $y \geq 0$*

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y).$$

Όμως έχουμε ότι αν $x > 0$ τότε

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} e^{-2|y|}dy = \int_{-\infty}^{0} e^{-2|y|}dy + \int_{0}^{x} e^{-2|y|}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2y}dy + \int_{0}^{x} e^{-2y}dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

και άν $x < 0$ τότε έχουμε ότι

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} e^{-2|y|}dy = \int_{-\infty}^{x} e^{2y}dy = \frac{1}{2}e^{2x}$$

καιάρα τελικά έχουμε ότι

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}, x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{2x}, x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

και επομένως αν $y \geq 0$

$$F_Y(y) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2y} - \frac{1}{2}e^{-2y} = 1 - e^{-2y}.$$

Τώρα για την σ.π.π της Y *έχουμε ότι*

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = 2e^{-2y}, y \geq 0 \tag{2}$$

Τώρα παρατηρούμε επομένως ότι η $Y \sim Exp(2)$ *και άρα έχουμε ότι* $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}, \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{4}$.

2. *Θέτουμε* $S_n = \sum_{i=1}^{n} |X_i|, 1 \leq n \leq 64$ *και απο το 1).ερώτημα έχουμε ότι* $\mu = \mathbb{E}(|X_i|) = \frac{1}{2}, \sigma^2 = \mathbb{V}(|X_i|) = \frac{1}{4}$.
Απο ΚΟϑ τώρα έχουμε ότι

$$P(24 < S_{64} < 36) = P\left(\frac{24-32}{\sqrt{16}} < \frac{S_{64} - 64\mu}{\sqrt{64\sigma^2}} < \frac{36-32}{\sqrt{16}}\right) \approx P(-2 < Z < 1)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0,8186.$$