ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ-ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ

Ιάσονας Ασκούνης

ΙΟΥΝΙΟΣ 2023

Βασικό Υλικό

1 ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός 1 (Ροπογεννήτρια τυχαίας μεταβλητής)**.** *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή.Τότε ροπογεννήτρια της X καλείται η συνάρτηση $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ και ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής e^{tX}.*

Παρατήρησεις . *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή.*

1. *Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή,τοτε*
$$M_X(t) = \sum_k e^{tk} f_X(k).$$
για κατάλληλα $t \in \mathbb{R}$,αν f_X είναι η σ.π της X.

2. *Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή,τότε*
$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$
για κατάλληλα $t \in \mathbb{R}$,αν f_X είναι η σ.π.π της X.

Ορισμός 2 (Πιθανογεννήτρια διακριτής τυχαίας μεταβλητής)**.** *Έστω X μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή με σ.π f_X.Τότε πιθανογεννήτρια της X είναι η συνάρτηση $P_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_k z^k f_X(k)$ και ορίζεται για κάθε z για το οποίο υπάρχει η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής z^X.*

Παρατήρησεις . *Έστω X μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή. Τότε*
$$P_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \mathbb{E}(e^{X \log z}) = M_X(\log z)$$
$$M_X(t) = P_X(e^t)$$
για κατάλληλα $z, t \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 1 (Βασικές Ιδιότητες Ροπογεννητριών).

- *Αν* X, Y *τυχαίες μεταβλητές τότε οι* X, Υ *έχουν την ίδια κατανομή αν και μόνο αν* $M_X(t) = M_Y(t)$ *για κάθε επιτρεπτό* $t \in \mathbb{R}$.
- *Αν* X *είναι τυχαία μεταβλητή τότε* $M_X(0) = 1$.
- *Αν* X *είναι τυχαία μεταβλητή τότε* $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και άρα* $M_X'(0) = \mathbb{E}(X), M_X''(0) = \mathbb{E}(X^2)$.
- *Αν* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,*τότε*
$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$
για κάθε επιτρεπτό $t \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2 (Βασικές Ιδιότητες Πιθανογεννητριών).

- *Αν* X, Y *είναι μη αρνητικές διακριτές τυχαίες μεταβλητές τότε οι* X, Υ *έχουν την ίδια κατανομή αν και μονο αν* $P_X(z) = P_Y(z)$ *για κάθε επιτρεπτό* z.
- *Αν* X *είναι μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή τότε* $P_X(1) = 1$.
- *Αν* X *είναι μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή τότε* $P_X^{(n)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1))$ *και άρα για* $n = 1$ *έχουμε ότι* $P_X'(1) = \mathbb{E}(X)$ *και για* $n = 2$ *έχουμε ότι* $\mathbb{E}(X^2) = P_X''(1) + \mathbb{E}(X)$.
- *Αν* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές και* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,*τότε*
$$P_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(z)$$
για κάθε επιτρεπτό z.

Πρόταση 3 (Πιθανογεννήτριες και Ροπογεννήτρις γνωστών κατανομών).

1. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim Bernulli(p), p \in (0,1)$.*Τότε*
   - $P_X(z) = 1 - p + pz, z \in \mathbb{R}$
   - $M_X(z) = 1 - p + pe^t, t \in \mathbb{R}$

2. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim Bin(n,p), n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$. *Τότε:*

   - $P_X(z) = (1-p+pz)^n, z \in \mathbb{R}$
   - $M_X(z) = (1-p+pe^t)^n, t \in \mathbb{R}$

3. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim Geom(p), p \in (0,1)$. *Τότε*

   - $P_X(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}, |z| < \frac{1}{1-p}$
   - $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, t < \ln\frac{1}{1-p}$

4. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim NegBin(n,p), n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$. *Τότε*

   - $P_X(z) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n, |z| < \frac{1}{1-p}$
   - $M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^n, t < \ln\frac{1}{1-p}$

5. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$. *Τότε*

   - $P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}, z \in \mathbb{R}$
   - $M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}, t \in \mathbb{R}$

6. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$. *Τότε*

   - $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}, t < \lambda$

7. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim Gamma(a,\lambda), a > 0, \lambda > 0$. *Τότε*

   - $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a, t < \lambda$

8. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim N(0,1)$. *Τότε*

   - $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$

9. *Έστω ότι* X *είναι τυχαία μεταβλητή με* $X \sim N(\mu,\sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. *Τότε*

   - $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$

Απόδειξη 1. *1. Αρχικά παρατηρούμε ότι*

$$P_X(z) = z^0 f_X(0) + z^1 f_X(1) = 1 - p + pz, z \in \mathbb{R}$$

$$\implies M_X(t) = P_X(e^t) = 1 - p + pe^t, t \in \mathbb{R}$$

απο παρατήρηση.

2. *Έχουμε ότι αφού* $X \sim Bin(n,p)$ *έπεται ότι* $X = \sum_{i=1}^n X_i, X_i \sim Bernulli(p)$ *και οι* X_i *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*
Επομένως τώρα απο πρόταση 1 και 2 και το 1). έχουμε ότι:

$$P_X(z) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(z) = (P_{X_1}(z))^n = (1 - p + pz)^n, z \in \mathbb{R}$$

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = (M_{X_1}(t))^n = (1 - p + pe^t)^n, t \in \mathbb{R}.$$

3. *Παρατηρούμε ότι :*

$$P_X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} p = pz \sum_{k=1}^{\infty} (z(1-p))^{k-1}$$

$$= pz \sum_{k=0}^{\infty} (z(1-p))^k = pz \frac{1}{1 - z(1-p)} = \frac{pz}{1 - (1-p)z}, |z| < \frac{1}{1-p}$$

$$\implies M_X(t) = P_X(e^t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}, t < \ln \frac{1}{1-p}$$

γιατί

$$e^t < \frac{1}{1-p} \iff t < \ln \frac{1}{1-p}.$$

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

4. *Παρατηρούμε ότι*

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{z\lambda} = e^{-\lambda(z-1)}, z \in \mathbb{R}$$

$$\implies M_X(t) = P_X(e^t) = e^{-\lambda(1-e^t)}, t \in \mathbb{R}$$

απο την παρατήρηση και το γεγονός ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι :*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x.$$

5. *Παρατηρούμε ότι*

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x}dx$$

και παρατηρούμε ότι αυτό το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $t-\lambda < 0$ *και άρα για* $t < \lambda$*:*

$$M_X(t) = \lambda\left[\frac{1}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-t}.$$

6. *Παρατηρούμε ότι*

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{xt}\frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}\lambda^a dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(a)}e^{-(\lambda-t)x}x^{a-1}\lambda^a dx = \frac{\lambda^a}{(\lambda-t)^a}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-(\lambda-t)x}(\lambda-t)^a dx =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx$$

όπου $Y \sim Gamma(a, \lambda-t)$ *αν* $t < \lambda$ *και άρα το ολοκλήρωμα της σ.π.π της* Y *αφού είναι 1 απο βασικές ιδιότητες της σ.π.π μιας τυχαίας μεταβλητής,έπεται τελικά ότι για* $t < \lambda$*:*

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a.$$

7. *Παρατηρούμε ότι*

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2tx}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2tx+t^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx$$

όπου $Y \sim N(t,1)$ *και άρα το ολοκλήρωμα στο* $\mathbb{R}$ *της σ.π.π της* Y *είναι 1 και τελικά έχουμε ότι :*

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}.$$

8. *Παρατηρούμε ότι αφού* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *έπεται ότι η* X *γράφεται ώς* $X = \sigma Z + \mu$ *όπου* $Z \sim N(0,1)$ *και άρα έχουμε ότι*

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(e^{t(\sigma Z+\mu})) = \mathbb{E}(e^{t\sigma Z} e^{t\mu}) = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{t\mu} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$$

2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. *Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim Bin(n,p)$ και $Y \sim Bin(m,p)$ όπου $p \in (0,1)$ και $n, m \in \mathbb{N}$.Να βρεθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Z = X + Y$.*

Λύση 1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι για την πιθανογεννήτρια της Z έχουμε από πρόταση 2 ότι αφου οι X, Y είναι ανεξάρτητες έπεται ότι*

$$P_Z(z) = P_X(z)P_Y(z) = (1-p+pz)^n(1-p+pz)^m = (1-p+pz)^{n+m}, z \in \mathbb{R}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι αν W είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με $W \sim Bin(n+m,p)$ τότε απο την πρόταση 3 έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$

$$P_W(z) = (1-p+pz)^{n+m} = P_Z(z)$$

και άρα απο βασική ιδιότητα των πιθανογεννητριών έπεται ότι οι W, Z έχουν την ίδια κατανομή και άρα $Z \sim Bin(n+m,p)$.

Άσκηση 2. *Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim Gamma(a,\theta)$ και $Y \sim Gamma(b,\theta)$ όπου $a, b, \theta > 0$.Να βρεθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Z = X + Y$.*

Λύση 2. *Αρχικά παρατηρούμε ότι για την πιθανογεννήτρια της Z έχουμε από πρόταση 1 ότι αφου οι X, Y είναι ανεξάρτητες έπεται ότι*

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^a \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^b = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^{a+b}, t < \theta$$

Τώρα παρατηρούμε ότι αν W είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με $W \sim Gamma(a+b,\theta)$ τότε απο την πρόταση 3 έχουμε ότι για κάθε $t < \theta$

$$M_W(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^{a+b} = M_Z(t)$$

και άρα απο βασική ιδιότητα των ροπογεννητριών έπεται ότι οι W, Z έχουν την ίδια κατανομή και άρα $Z \sim Gamma(a+b,\theta)$.

Άσκηση 3. *Έστω X τυχαία μεταβλητή που έχει ροπογεννήτρια την*

$$M_X(t) = \frac{e^{7t}}{1-t^2}, |t| < 1$$

Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της X.

Λύση 3. *Γνωρίζουμε ότι*

$$M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n), n \in \mathbb{N}$$

απο πρόταση 1.Άρα για $n = 1, 2$ έχουμε αντίστοιχα ότι

$$M_X'(0) = \mathbb{E}(X)$$

$$M_X''(0) = \mathbb{E}(X^2)$$

Όμως

$$M_X'(t) = \frac{7e^{7t}(1-t^2) + 2te^{7t}}{(1-t^2)^2}, |t| < 1$$

$$\implies M_X'(0) = 7$$

και επίσης

$$M_X''(t) = \frac{(49e^{7t}(1-t^2) - 14e^{7t}t + 2e^{7t} + 14e^{7t}t)(1-t^2) + 4t(1-t^2)(7e^{7t}(1-t^2) + 2te^{7t})}{(1-t^2)^4}, |t| < 1$$

$$\implies M_X''(0) = 51$$

και άρα

$$\mathbb{E}(X) = 7$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 51.$$

Τελικά έχουμε ότι

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 51 - 49 = 2.$$

Άσκηση 4. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με σ.π.π*

$$f_X(x) = (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}, x > 0.$$

1. *Να αποδειχθεί ότι η ροπογεννήτρια της X είναι η $M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$ για κάθε $t < \frac{1}{2}$ και να προσδιοριστεί η κατανομή της X.*

2. *Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της X.*

Δίνεται ότι $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ και αν X είναι τυχαία μεταβλητή με $X \sim Gamma(a, \lambda)$ όπου $a > 0, \lambda > 0$,τότε $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a, t < \lambda$.

Λύση 4. 1. *Παρατηρούμε αρχικά ότι*

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{tx}(2\pi x)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x(\frac{1}{2}-t)} dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{(1-\frac{1}{2})-1} e^{-x(\frac{1}{2}-t)} \left(\frac{1}{2} - t\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx$$

όπου $Y \sim Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - t)$ για $t < \frac{1}{2}$ και άρα ολοκληρώνοντας την σ.π.π της Y στο $\mathbb{R}$ έχουμε απο βασικές ιδιότητες της σ.π.π μιας τυχαίας μεταβλητής ότι το ολοκλήρωμα ισούται με 1.Άρα για $t < \frac{1}{2}$ έπεται ότι

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Τώρα θυμόμαστε ότι αν $Y \sim Gamma(a, \lambda)$ τότε αυτή έχει συνάρτηση ροπογεννήτριας την $M_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a, t < \lambda$ και άρα για $\lambda = a = \frac{1}{2}$ έχουμε ότι για $t < \lambda = \frac{1}{2}$

$$M_Y(t) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{1}{2}} = (1-2t)^{-\frac{1}{2}} = M_X(t)$$

και άρα απο βασική ιδιότητα των ροπογεννητριών έπεται ότι οι X, Y είναι ισόνομες και άρα $X \sim Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. *Έχουμε ότι απο θεωρία ότι αφού* $X \sim Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\mathbb{E}(X) = 1$$

$$\mathbb{V}(X) = 2.$$

η αλλιώς με τους γνωστούς τύπους που συνδέουν την ροπογεννήτρια με τις ροπές κ-τάξης $\mathbb{E}(X^k), k \in \mathbb{N}$.*(Χρησιμοποιούμε δηλαδη ότι* $M_X'(0) = \mathbb{E}(X), M_X''(0) = \mathbb{E}(X^2)$*).*

Άσκηση 5. *Έστω* X *διακριτή τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές τιμές και συνάρτηση πιθανογεννήτριας την*

$$P_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+z}{2}\right)^4 + ce^{2(z-1)}, z \in \mathbb{R}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ *σταθερά.*

1. *Να βρεθεί η σταθερά* c.
2. *Να βρεθούν η διασπορά και η μέση τιμή της* X.
3. *Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανογεννήτριας της* $2X$

Λύση 5. 1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι απο την σχέση* $P_X(1) = 1$ *αντικαθιστώντας έχουμε*

$$1 = \frac{1}{3} + c \implies c = \frac{2}{3}$$

2. *Γνωρίζουμε απο βασικές ιδιότητες της πιθανογεννητριας ότι*

$$P_X'(1) = \mathbb{E}(X)$$

και άρα αφού

$$P_X'(z) = \frac{4}{48}(1+z)^3 + \frac{4}{3}e^{2(z-1)}, z \in \mathbb{R}$$
$$\implies P_X'(1) = \frac{32}{48} + \frac{4}{3} = \frac{4}{6} + \frac{4}{3} = \frac{12}{6} = 2 = \mathbb{E}(X)$$

. Επίσης έχουμε ότι

$$P_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

$$\implies \mathbb{E}(X^2) = P_X''(1) + \mathbb{E}(X).$$

Όμως έχουμε ότι

$$P_X''(z) = \frac{1}{4}(1+z)^2 + \frac{8}{3}e^{2(z-1)}, z \in \mathbb{R}$$
$$\implies P_X''(1) = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$
$$\implies \mathbb{E}(X^2) = \frac{11}{3} + 2 = \frac{17}{3}.$$

Τελικά για την διασπορά της X έχουμε ότι

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{17}{3} - 4 = \frac{5}{3}.$$

3. *Παρατηρούμε αρχικά ότι για την πιθανογεννήτρια της $2X$ έχουμε ότι*

$$P_{2X}(z) = \mathbb{E}(z^{2X}) = P_X(z^2) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+z^2}{2}\right)^4 + \frac{2}{3}e^{2(z^2-1)}, z \in \mathbb{R}.$$

3 HOMEWORK

Άσκηση 6. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με σ.π.π την*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

1. *Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της τυχαίας μεταβλητής X.Να βρεθούν τα t για τα οποία αυτή είναι πεπερασμένη.*

2. *Χρησιμοποιώντας το παραπάνω ερώτημα να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.*

Άσκηση 7. *Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαιές μεταβλητές με $X, Y \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$.Να βρεθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Z = X + Y$.*

Άσκηση 8. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια*

$$M_X(t) = \frac{1}{3} e^{2(e^t-1)} + ce^{5(e^t-1)}, t \in \mathbb{R}$$

όπου c σταθερά.

1. *Να βρεθεί η σταθερά c.*

2. *Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.*

3. *Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της $2X + 1$.*

4 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}xe^{-\frac{x}{4}}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. *Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της τυχαίας μεταβλητής X και να προσδιοριστεί για ποιά $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $M_X(t) < +\infty$.*

2. *Μέσω της ροπογεννήτριας του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογιστούν η μέση τιμή $\mathbb{E}(X)$ και η διασπορά $\mathbb{V}(X)$ της τυχαίας μεταβλητής X.*

3. *Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $P(2 \leq X \leq 14) \geq \frac{1}{9}$.*

Λύση 1. 1. *Παρατηρούμε ότι*

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{16} xe^{tx}e^{-\frac{x}{4}}dx = \frac{1}{16}\int_0^{+\infty} xe^{-(\frac{1}{4}-t)x}dx$$

$$= \frac{1}{16\left(\frac{1}{4}-t\right)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(2)} x^{2-1}e^{-(\frac{1}{4}-t)x}\left(\frac{1}{4}-t\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{16\left(\frac{1}{4}-t\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)dx$$

όπου $Y \sim Gamma\left(2, \frac{1}{4}-t\right)$ για $t < \frac{1}{4}$ και άρα για αυτά τα t έχουμε ότι το ολοκλήρωμα της σ.π.π της Y είναι 1 και έχουμε τελικά ότι για $t < \frac{1}{4}$

$$M_X(t) = \frac{1}{16\left(\frac{1}{4}-t\right)^2}.$$

Παραπάνω χρησιμοποιήθηκε ότι $\Gamma(2) = 1$.
Παρατηρόυμε τώρα ότι για για $t \geq \frac{1}{4}$ έχουμε ότι

$$M_X(t) = +\infty$$

κάνοντας κατά παράγοντες και άρα τελικά τα t για τα οποία $M_X(t) < +\infty$ είναι τα $t < \frac{1}{4}$.

2. *Παρατηρούμε τώρα ότι απο βασικές ιδιότητες της ροπογεννήτριας έχουμε ότι*

$$M'_X(0) = \mathbb{E}(X)$$

$$M''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$$

και άρα έχουμε ότι αφού

$$M'_X(t) = \frac{1}{8\left(\frac{1}{4} - t\right)^3}$$

$$M'_X(0) = 8 = \mathbb{E}(X).$$

Επίσης έχουμε ότι

$$M''_X(t) = \frac{3}{8\left(\frac{1}{4} - t\right)^4}$$

$$\implies M''_X(0) = 96$$

και άρα

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 96 - 64 = 32.$$

3. *Παρατηρούμε τώρα ότι*

$$P(2 \leq X \leq 14) = P(2 - 8 \leq X - \mathbb{E}(X) \leq 14 - 8) = P(-6 \leq X - \mathbb{E}(X) \leq 6)$$

$$= P(|X - \mathbb{E}(|X|)| \leq 6) = 1 - P(|X - \mathbb{E}(X)| > 6) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{36} = 1 - \frac{32}{36} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

όπου στο σημείο της ανισότητας χρησιμοποιήσαμε την Chebyshev.

Θέμα 2. *Έστω* $a > 0$ *και* X,Λ *τυχαίες μεταβλητές σε κοινό χώρο πιθανότητας ώστε η* Λ *να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* $a > 0$ *και δεδομένου ότι* $\Lambda = \lambda$ *η* X *ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο* λ*.Δηλαδή* $X|\{\Lambda = \lambda\} \sim Poisson(\lambda)$.

1. *Να υπολογιστεί η πιθανογεννήτρια* $P_X(z)$ *της* X *για* $|z| < 1$.

2. *Για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *να υπολογιστεί η πιθανότητα* $P(X = k)$.

3. *Τι κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή* $X + 1$;