

# ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι – ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 21.06.2023

ΤΜΗΜΑ Π. ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΥ

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Οδηγίες: Η μέγιστη βαθμολογία είναι 120. Χρησιμοποιήστε πρόχειρο και γράψτε τις λύσεις με τη σειρά.

**Θέμα 1 [10 μονάδες].** Υποθέστε ότι τα ενδεχόμενα  $A, B, C, D$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ότι  $\mathbb{P}(CD) > 0$ . Δείξτε ότι  $\mathbb{P}(A | CD) = \mathbb{P}(A)$ ,  $\mathbb{P}(B | CD) = \mathbb{P}(B)$ ,  $\mathbb{P}(AB | CD) = \mathbb{P}(AB)$ , και  $\mathbb{P}(A \cup B | CD) = \mathbb{P}(A \cup B)$ .

**Θέμα 2 [15 μονάδες].** Ρίχνουμε ένα – πιθανώς κίβδηλο – νόμισμα δύο φορές. Έστω  $A$  το ενδεχόμενο να φέρουμε δύο κορώνες,  $B$  το ενδεχόμενο να φέρουμε τουλάχιστον μία κορώνα, και  $C$  το ενδεχόμενο η πρώτη ρίψη να είναι κορώνα.

(1) Να δείξετε ότι  $\mathbb{P}(A | C) \geq \mathbb{P}(A | B)$ .

(2) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες  $\mathbb{P}(A | C)$  και  $\mathbb{P}(A | B)$  αν το νόμισμα είναι δίκαιο.

**Θέμα 3 [15 μονάδες].** Ρίχνουμε τρία αμερόληπτα ζάρια και σημειώνουμε το άθροισμα τους. Τι είναι πιο πιθανό: να φέρουμε άθροισμα ίσο με 11 ή ίσο με 12?

**Θέμα 4 [15 μονάδες].** Ρίχνουμε δύο νομίσματα συγχρόνως μέχρι το ένα από αυτά να έρθει κορώνα και το άλλο γράμματα. Το πρώτο νόμισμα έρχεται κορώνα με πιθανότητα  $p$ , το δεύτερο με πιθανότητα  $q$ . Όλες οι ρίψεις θεωρούνται ανεξάρτητες. Να βρεθεί (1) η σ.μ.π., η μέση τιμή, και η διασπορά του αριθμού των ρίψεων, καθώς και (2) η πιθανότητα ότι η τελευταία ρίψη του πρώτου νομίσματος είναι κορώνα. Δίνεται ότι η γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $\rho$  έχει μέσο  $1/\rho$  και διασπορά  $(1 - \rho)/\rho^2$ .

**Θέμα 5 [10 μονάδες].** Έστω ότι η  $X$  έχει σ.π.π.  $f(x) = ce^{-\lambda|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , για κάποια σταθερά  $c > 0$ . Να προσδιορίσετε τη σταθερά  $c$  και να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της  $X$ .

**Θέμα 6 [20 μονάδες].** Ένα σημείο επιλέγεται τυχαία (με ομοιόμορφη σ.π.π.) στο ημικύκλιο  $D = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ,  $R > 0$ . Να υπολογίσετε (1) την από κοινού σ.π.π. των συντεταγμένων  $X$  και  $Y$ , (2) τις περιθώριες σ.π.π. των  $X$  και  $Y$ , και, τέλος, (3) τις μέσες τιμές  $\mathbb{E}[X]$  και  $\mathbb{E}[Y]$ .

**Θέμα 7 [10 μονάδες].** Έστω  $X$  διακριτή τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας  $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ , και  $\mathbb{P}(X = 3) = 1/4$ . Να υπολογίσετε (1) τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της  $X$ , και (2) τις ροπές  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[X^2]$  και  $\mathbb{E}[X^3]$ .

**Θέμα 8 [25 μονάδες].** Έστω ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots$  με πεπερασμένη μέση τιμή  $\mu$ , και έστω  $Y_i = X_i X_{i+1}$  για  $i \in \mathbb{N}$ .

(1) Υπολογίστε την  $\mathbb{E}[Y_i]$ .

(2) Είναι η  $Y_i$  και η  $Y_{i+1}$  ανεξάρτητες? Είναι ισόνομες?

[Ναι/Όχι]

(3) Είναι η  $Y_i$  και η  $Y_{i+2}$  ανεξάρτητες? Είναι ισόνομες?

[Ναι/Όχι]

(4) Έστω  $R_n = Y_1 + Y_3 + \dots + Y_{2n+1}$ . Βρείτε το όριο της  $R_n/n$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

(5) Έστω  $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ . Βρείτε το όριο της  $S_n/n$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

Καλή επιτυχία!!