ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι – ΠΡΟΟΔΟΣ 04.05.2023

ΤΜΗΜΑ Π. ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΥ

Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα

Οδηγίες: Λύστε όσα προβλήματα προλαβαίνετε στο χρόνο της εξέτασης· **η μέγιστη βαθμολογία είναι 20**. Γράφετε τις λύσεις με τη σειρά και **σημειώστε με καθαρό και ευδιάκριτο τρόπο τα προβλήματα που λύνετε!**

Θέμα 1 (2 μονάδες). Ανοίγουμε κατά σειρά χαρτιά από μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Ποιά είναι η πιθανότητα το 13ο χαρτί που θα ανοίξουμε να είναι η πρώτη ντάμα?

※

Θέμα 2 (3 μονάδες). Σας δίνονται τρία νομίσματα: το πρώτο έχει κορώνα και στις δύο πλευρές, το δεύτερο έχει γράμματα και στις δύο πλευρές, και το τρίτο έχει κορώνα στη μία πλευρά και γράμματα στην άλλη. Επιλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη (ισοπίθανα), το ρίχνουμε και έρχεται κορώνα. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι η άλλη πλευρά είναι γράμματα?

※

Θέμα 3 (3 μονάδες). Έστω ενδεχόμενα A, B, C ενός πειράματος τύχης. Να δειχθεί ότι

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(C \mid B)\,\mathbb{P}(A \mid BC) + \mathbb{P}(C' \mid B)\,\mathbb{P}(A \mid BC')$$

όπου C' το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του C και τα υπό δέσμευση ενδεχόμενα έχουν θετική πιθανότητα.

※

Θέμα 4 (6 μονάδες). Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ θετικοί ακέραιοι με $a \leq b$, και έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στις δυνάμεις του 2 στο διάστημα $[2^a, 2^b]$ (δηλαδή παίρνει ως τιμές τις δυνάμεις του 2 στο παραπάνω διάστημα με ίση πιθανότητα). Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

※

Θέμα 5 (6 μονάδες). Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με σ.μ.π.

$$p(x) = \begin{cases} x^2/c & \text{αν } x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \\ 0 & \text{άλλως} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ προσδιοριστέα σταθερά.

(1) Υπολογίστε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$ της X.
(2) Βρείτε τη σ.μ.π. της τυχαίας μεταβλητής $Y = [X - \mathbb{E}[X]]^2$.
(3) Υπολογίστε τη διασπορά $\mathrm{Var}(X)$ της X.

※

Θέμα 6 (6 μονάδες). Έστω $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να δείξετε ότι

$$\mathbb{E}[X^n] = \lambda\,\mathbb{E}[(X+1)^{n-1}] \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση (ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο), υπολογίστε την $\mathbb{E}[X^3]$.

※

Καλή επιτυχία!!

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1 (2 μονάδες). Ανοίγουμε κατά σειρά χαρτιά από μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Ποιά είναι η πιθανότητα το 13ο χαρτί που θα ανοίξουμε να είναι η πρώτη ντάμα?

Λύση. Ο συνολικός αριθμός τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 13 χαρτιά από μία τράπουλα (χωρίς επανατοποθέτηση) είναι

$$52 \times 51 \times 50 \times \cdots \times 40$$

Ο συνολικός αριθμός τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 13 χαρτιά από την τράπουλα έτσι ώστε (i) να μην υπάρχει καμία ντάμα στα 12 πρώτα, και (ii) το 13ο χαρτί να είναι ντάμα είναι

$$\underbrace{48 \times 47 \times \cdots \times 37}_{\text{12 χαρτιά από 48 (ντάμες εκτός)}} \quad \times \quad \underbrace{4}_{\text{1 χαρτί από 4 (ντάμες)}}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{48 \times 47 \times \cdots \times 37 \times 4}{52 \times 51 \times 50 \times \cdots \times 40}$$

■

Σημειώσεις:

(1) Στην τάξη δείξαμε έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της παραπάνω πιθανότητας ως

$$\frac{1}{13} \frac{\binom{48}{12} \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{13}}$$

Μία καλή άσκηση για εξάσκηση θα ήταν να δείξετε ότι οι δύο παραστάσεις είναι όντως ίσες.

(2) Λόγω τυπογραφικού, στην πρόοδο δεν είχε μπει ο χαρακτηρισμός "πρώτη" ντάμα, με αποτέλεσμα το πρόβλημα να ζητάει ποιά είναι η πιθανότητα το 13ο χαρτί να είναι ντάμα. Μετά την πρόοδο σας είπα ότι το πρόβλημα αυτό (δηλ. χωρίς το χαρακτηρισμό "πρώτη") είναι δύσκολο. Αυτό ήταν λόγω σύγχυσης εξαιτίας του τυπογραφικού: η πιθανότητα το 13ο χαρτί να είναι ντάμα είναι ίδια με την πιθανότητα οποιοδήποτε χαρτί να είναι ντάμα, και είναι ίση με $4/52 = 1/13$.

Θέμα 2 (3 μονάδες). Σας δίνονται τρία νομίσματα: το πρώτο έχει κορώνα και στις δύο πλευρές, το δεύτερο έχει γράμματα και στις δύο πλευρές, και το τρίτο έχει κορώνα στη μία πλευρά και γράμματα στην άλλη. Επιλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη (ισοπίθανα), το ρίχνουμε και έρχεται κορώνα. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι η άλλη πλευρά είναι γράμματα?

Λύση. Για ευκολία, ας συμβολίσουμε τα τρία νομίσματα ως ΓΓ, ΓΚ, ΚΚ. Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα ότι επιλέχθηκε το ΓΚ, *δεδομένου* ότι το αποτέλεσμα της ρίψης ήταν Κ. Συνεπώς, αν A το ενδεχόμενο ότι το νόμισμα που επιλέχθηκε ήταν το ΓΚ και B το ενδεχόμενο ότι το αποτέλεσμα της ρίψης ήταν Κ, θα έχουμε:

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\text{επιλέξαμε το ΓΚ } \textbf{\textit{και}} \text{ φέραμε Κ}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

και

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\text{φέραμε Κ}) = \underbrace{\frac{1}{3} \times 0}_{\text{Ρίξαμε ΓΓ, φέραμε Κ}} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{Ρίξαμε ΓΚ, φέραμε Κ}} + \underbrace{\frac{1}{3} \times 1}_{\text{Ρίξαμε ΚΚ, φέραμε Κ}} = \frac{1}{2}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/3 \times 1/2}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

■

Θέμα 3 (3 μονάδες). Έστω ενδεχόμενα A, B, C ενός πειράματος τύχης. Να δειχθεί ότι

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(C \mid B)\,\mathbb{P}(A \mid BC) + \mathbb{P}(C' \mid B)\,\mathbb{P}(A \mid BC')$$

όπου C' το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του C και τα υπό δέσμευση ενδεχόμενα έχουν θετική πιθανότητα.

Λύση. Ξεκινώντας από το δεξί σκέλος έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C \mid B)\,\mathbb{P}(A \mid BC) + \mathbb{P}(C' \mid B)\,\mathbb{P}(A \mid BC') &= \frac{\cancel{\mathbb{P}(CB)}}{\mathbb{P}(B)}\frac{\mathbb{P}(ABC)}{\cancel{\mathbb{P}(BC)}} + \frac{\cancel{\mathbb{P}(C'B)}}{\mathbb{P}(B)}\frac{\mathbb{P}(ABC')}{\cancel{\mathbb{P}(BC')}} \\
&= \frac{\mathbb{P}(ABC) + \mathbb{P}(ABC')}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(ABC \cup ABC')}{\mathbb{P}(B)} && \text{\# επειδή } ABC \cap ABC' = \varnothing \\
&= \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} && \text{\# επειδή } ABC \cup ABC' = AB(C \cup C') = AB \\
&= \mathbb{P}(A \mid B) && \blacksquare
\end{aligned}$$

Θέμα 4 (6 μονάδες). Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ θετικοί ακέραιοι με $a \le b$, και έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στις δυνάμεις του 2 στο διάστημα $[2^a, 2^b]$ (δηλαδή παίρνει ως τιμές τις δυνάμεις του 2 στο παραπάνω διάστημα με ίση πιθανότητα). Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

Λύση. Από την εκφώνηση, η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές από το διακριτό σύνολο

$$\mathcal{X} = \{2^a, 2^{a+1}, \ldots, 2^b\}$$

Από τη στιγμή που η είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη (εξ υποθέσεως), κάθε μία από τις τιμές $x \in \mathcal{X}$ θα πραγματοποιείται με πιθανότητα $p(x) = 1/|\mathcal{X}| = 1/(b-a+1)$. Συνεπώς, θα έχουμε:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)x = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} 2^k = \frac{2^a + \cdots + 2^b}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1}\frac{2^{b+1} - 2^a}{2-1} = \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}$$

από τις στοιχειώδεις ιδιότητες της γεωμετρικής προόδου. Ομοίως, υπολογίζουμε

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)x^2 = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} 2^{2k} = \frac{2^{2a} + \cdots + 2^{2b}}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1}\frac{4^{b+1} - 4^a}{4-1} = \frac{2^{b+1} + 2^a}{3}\frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}$$

και

$$\mathbb{E}[X]^2 = \left[\frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}\right]^2 = \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}\frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}$$

οπότε, συνολικά

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \ldots = \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}\left[\frac{2^{b+1} + 2^a}{3} - \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}\right] \qquad \blacksquare$$

Σημείωση: Οποιαδήποτε άλλη αλγεβρικά ορθή συνάρτηση των a, b θα ήταν αποδεκτή ως αποτέλεσμα.

Θέμα 5 (6 μονάδες). Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με σ.μ.π.

$$p(x) = \begin{cases} x^2/c & \text{αν } x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \\ 0 & \text{άλλως} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ προσδιοριστέα σταθερά.

(1) Υπολογίστε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$ της X.

(2) Βρείτε τη σ.μ.π. της τυχαίας μεταβλητής $Y = [X - \mathbb{E}[X]]^2$.

(3) Υπολογίστε τη διασπορά $\mathrm{Var}(X)$ της X.

Λύση. Αρχικά, αφού η p είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας, θα πρέπει να έχουμε

$$1 = \sum_{x=-3}^{3} p(x) = \sum_{x=-3}^{4} \frac{x^2}{c} = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{c} = \frac{28}{c}$$

οπότε προκύπτει ότι $c = 28$.

- **Ερ. (1).** Για τη μέση τιμή της X, μπορούμε να συμπεράνουμε απευθείας ότι $\mathbb{E}[X] = 0$ λόγω συμμετρίας. Αυτό προκύπτει και αναλυτικά ως εξής:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=-3}^{3} p(x)x = \sum_{x=-3}^{3} \frac{x^3}{c} = \frac{(-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3}{28} = 0.$$

- **Ερ. (2).** Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = [X - \mathbb{E}[X]]^2 = X^2$ θα παίρνει τις τιμές:
  - $y = 0$ όταν $x = 0$, με πιθανότητα $p(0) = 0$
  - $y = 1$ όταν $x = \pm 1$, με πιθανότητα $p(1) + p(-1) = 2/c$.
  - $y = 4$ όταν $x = \pm 2$, με πιθανότητα $p(2) + p(-2) = 8/c$.
  - $y = 9$ όταν $x = \pm 3$, με πιθανότητα $p(3) + p(-3) = 18/c$.

  Άρα, συνολικά, η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Y θα είναι

$$p_Y(y) = \begin{cases} y/14 & \text{όταν } y \in \{1, 4, 9\}, \\ 0 & \text{άλλως.} \end{cases}$$

- **Ερ. (3).** Τέλος, για τη διασπορά της X, θα έχουμε:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[[X - \mathbb{E}[X]]^2] = \mathbb{E}[Y] = \sum_{y=1}^{3} y \cdot p_Y(y) = \frac{1^2 + 4^2 + 9^2}{14} = \frac{98}{14} = 7. \qquad \blacksquare$$

Σημείωση: Οποιοσδήποτε άλλος μαθηματικά ορθός υπολογισμός της διασποράς της X θα ήταν αποδεκτός.

Θέμα 6 (6 μονάδες). Έστω $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να δείξετε ότι

$$\mathbb{E}[X^n] = \lambda\, \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}] \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση (ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο), υπολογίστε την $\mathbb{E}[X^3]$.

Λύση. Για το πρώτο ερώτημα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^n] &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k) k^n && \text{\# από LOTUS} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} k^n = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} k^{n-1} && \text{\# χρήση Poisson και απλοποίηση} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} (r+1)^{n-1} && \# \; k \leftarrow r+1 \\
&= \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}] && \# \text{ από LOTUS}
\end{aligned}
$$

Για το δεύτερο ερώτημα, χρησιμοποιώντας το πρώτο, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^3] &= \lambda\, \mathbb{E}[(X+1)^2] = \lambda\, \mathbb{E}[X^2 + 2X + 1] && \# \text{ χρήση 1ου ερ/τος} \\
&= \lambda\, \mathbb{E}[X^2] + 2\lambda\, \mathbb{E}[X] + \lambda\, \mathbb{E}[1] \\
&= \lambda^2\, \mathbb{E}[(X+1)] + 2\lambda\, \mathbb{E}[X] + \lambda && \# \text{ χρήση 1ου ερ/τος: } \mathbb{E}[X^2] = \lambda\, \mathbb{E}[X+1] \\
&= \lambda^2\, \mathbb{E}[X] + \lambda^2 + 2\lambda\, \mathbb{E}[X] + \lambda && \# \text{ χρήση 1ου ερ/τος: } \mathbb{E}[X] = \lambda\, \mathbb{E}[(X+1)^0] = \lambda \\
&= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda. && \blacksquare
\end{aligned}
$$

Σημείωση: Η παραπάνω λύση δεν υποθέτει γνώση των ροπών $\mathbb{E}[X] = \lambda$ και $\mathbb{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda$ της κατανομής Poisson. Αν το θυμόσασταν, η άσκηση φυσικά λύνεται πιο γρήγορα.