ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

Θέμα 1: Με το άνοιγμα μιας δημόσιας υπηρεσίας n άτομα έχουν κάνει ουρά από τα χαράματα για να εξυπηρετηθούν, και έστω $i = 1, 2, \ldots, n,\ (n \geq 2)$, μία αρίθμηση των ατόμων, σύμφωνα με τη σειρά άφιξής τους. Τα άτομα τσακώνονται μεταξύ τους για τη σειρά και μία υπάλληλος αποφασίζει να μοιράσει στην τύχη n χαρτάκια (από το 1 μέχρι το n), για να καθορίσει η ίδια τη σειρά εξυπηρέτησης. Έστω A_i το ενδεχόμενο το i άτομο να εξυπηρετηθεί τελικά σύμφωνα με τη σειρά άφιξής του.

(α) Να καθοριστεί κατάλληλος δειγματικός χώρος για αυτό το πείραμα τύχης και να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ και $P(A_iA_j)$, $1 \leq i < j \leq n$.

(β) Αν B είναι το ενδεχόμενο τουλάχιστον ένα άτομο να εξυπηρετηθεί σύμφωνα με τη σειρά άφιξής του, τότε να βρεθεί η πιθανότητα $P(B)$.

(γ) Να γίνει μία ασυμπτωτική προσέγγιση της πιθανότητας $P(B)$, για μεγάλες τιμές του n. (Υπόδειξη: για κάθε $x \in \mathbb{R},\ e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$)

(δ) Αν X είναι το πλήθος των ατόμων που εξυπηρετούνται σύμφωνα με τη σειρά άφιξής τους, τότε να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της X.

Θέμα 2: Δύο φίλοι, οι Α και Β, αποφασίζουν να παίξουν το εξής παιχνίδι σε ένα γήπεδο μπάσκετ: ξεκινάει ο Α, και ρίχνει τόσες βολές ας πούμε T, μέχρι να βάλει για πρώτη φορά καλάθι. Στη συνέχεια, ο Β παίρνει τη μπάλα και ρίχνει τόσες βολές, ας πούμε N, όσο είναι το πλήθος των χαμένων βολών του Α. Εννοείται πως αν η πρώτη βολή του Α είναι επιτυχημένη, τότε ο Β δεν ρίχνει καμία βολή και έτσι ο Α κερδίζει. Υποθέτουμε ότι σε κάθε βολή ο Α βάζει καλάθι με πιθανότητα α και ο Β με πιθανότητα β, όπου $0 < \alpha, \beta < 1$, και ότι όλες οι βολές (είτε του Α, είτε του Β) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Νικητής είναι ο Β αν καταφέρει να βάλει τουλάχιστον ένα καλάθι. Να βρεθούν:

(α) η συνάρτηση πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά της N. Δίνεται ότι $E(T) = 1/\alpha$ και ότι $Var(T) = (1-\alpha)/\alpha^2$.

(β) η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού X των επιτυχημένων βολών του Β.

(γ) η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P_X(z)$ της τυχαίας μεταβλητής X και στη συνέχεια να συμπεράνετε τί είδους κατανομή ακολουθεί.

(δ) η πιθανότητα να κερδίσει ο Β.

Θέμα 3: Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων αντιγράφων μιας τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_X(x) = (2\pi x)^{-1/2}\exp\{-\frac{x}{2}\}$ για κάθε $x > 0$.

(α) Να δειχθεί ότι η ροπογεννήτρια της X είναι $M_X(t) = (1-2t)^{-1/2}$ για κάθε $t < 1/2$ και να προσδιοριστεί η κατανομή της X.

(β) Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X.

(γ) Αν $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, κάντε μία ασυμπτωτική προσέγγιση της πιθανότητας $P(S_n > n)$, για μεγάλες τιμές του n.

(δ) Βρείτε την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $Z = I\sqrt{X}$, όπου I είναι τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της X, που παίρνει τις τιμές -1 και 1 ισοπίθανα.

Θέμα 4: Έστω (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{αν } x^2+y^2 \leq 1 \text{ και } xy > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ζητείται:

(α) να σχεδιαστεί το στήριγμα της (X,Y) και να δειχθεί ότι η $f_{X,Y}$ είναι πράγματι σ.π.π..

(β) να προσδιοριστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y, και να εξεταστεί αν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

(γ) να βρεθεί η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της X δοθέντος ότι $Y = y$, για $0 < y < 1$.

(δ) να προσδιοριστούν η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|Y=y]$ και η δεσμευμένη διασπορά $Var[X|Y=y]$ της X δοθέντος ότι $Y=y$, για $0<y<1$.

(ε) να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X=Y)$ και $P(X<Y)$.

Ερωτήματα BONUS:

(α) Να εξεταστεί αν υπάρχει μη εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή X που να είναι ανεξάρτητη της X^3.

(β) Έστω (X_n) μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ., όπου $X_n \sim \text{Bernoulli}(p_n)$, $n \geq 1$, $0 < p_n < 1$. Επιλέγουμε έναν αριθμό στο $[0,1]$ με τη βοήθεια της δυαδικής αναπαράστασης $X = 0, X_1X_2X_3\ldots$ Δώστε ένα παράδειγμα ακολουθίας (p_n) έτσι ώστε $P(X=0) > 0$.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ:

- Για τη συνάρτηση κατανομής της τυπικής Κανονικής $\mathcal{N}(0,1)$ δίνονται:
  $\Phi(0.5) = 0.692$, $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(1.5) = 0.933$, $\Phi(2) = 0.977$, $\Phi(2.5) = 0.994$.
- Για τη συνάρτηση Γάμμα $\Gamma(a)$ δίνονται:
  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$, $\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- Ροπογεννήτριες Γνωστών Κατανομών:
  - $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$: $\quad M_X(t) = \exp\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$, $\quad t \in \mathbb{R} \quad (\mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0)$,
  - $X \sim \mathrm{G}(\alpha,\theta)$: $\quad M_X(t) = (1-\theta^{-1}t)^{-\alpha}$, $\quad t < \theta \quad (a,\theta > 0)$.

- **Να απαντήσετε μόνο σε 3 από τα 4 θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Κάθε ερώτημα BONUS βαθμολογείται με 1 μονάδα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!