

**Θέμα 1ο:** (α) Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 9 κάρτες. Από αυτές, 2 έχουν και τις δύο πλευρές κόκκινες, 3 έχουν και τις δύο πλευρές πράσινες και 4 έχουν μία πλευρά κόκκινη και μία πλευρά πράσινη. Επιλέγουμε στην τύχη μία κάρτα και ακολούθως βλέπουμε στην τύχη μία πλευρά της. Να υπολογιστούν:

- (1) (1 μον.) Η πιθανότητα να δούμε κόκκινη πλευρά.
  - (2) (1 μον.) Η πιθανότητα η κάρτα που επιλέχθηκε να έχει και τις δύο πλευρές κόκκινες δεδομένου ότι η πλευρά που είδαμε ήταν κόκκινη.
- (β) (1 μον.) Ρίχνουμε συνεχώς ένα συνηθισμένο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη «1». Να υπολογιστεί η μέση τιμή του αθροίσματος όλων των ενδείξεων που έφερε το ζάρι.

**Θέμα 2ο:** Έστω  $X, Y$  ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = 2e^{-2x}1_{\{x>0\}}, \quad f_Y(y) = 5e^{-5y}1_{\{y>0\}}.$$

- (1) (1 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα  $P(3 < X < 5 \mid X > 4)$ .
- (2) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(X < Y)$ .
- (3) (1 μον.) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της  $\min(X, Y)$ .
- (4) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της  $Z = 2X + 5Y$ .

**Θέμα 3ο:** Έστω  $(X, Y)$  διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = cx^3 e^{-2xy} 1_{\{0 < x < 1, y > 0\}}.$$

- (1) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η σταθερά  $c$ .
- (2) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$ .
- (3) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή  $E[Y \mid X = x]$ .
- (4) (1 μον.) Να υπολογιστεί η  $E[XY]$ .

**Θέμα 4ο:** (α) Η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{4t}}{1 - t^2}, \quad |t| < 1.$$

- (1) (0.5 μον.) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της  $X$ .
- (2) (1 μον.) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$P(X \leq 1) \leq \frac{2}{9}.$$

(β) (1 μον.) Αν οι τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_{72}$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με ροπογεννήτρια όπως στο ερώτημα (α), να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα

$$P(264 < X_1 + X_2 + \dots + X_{72} < 300).$$

$[\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9773, \Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(3) = 0.9987]$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!