

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΙΟΥΝΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. (3 βαθμοί) Παρατηρούμε τις διαδοχικές ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος που φέρνει την ένδειξη 'Κ' με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και την ένδειξη 'Γ' με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Να υπολογιστούν:

- (α) η πιθανότητα στις πρώτες 10 ρίψεις να εμφανιστούν 6 'Κ' και 4 'Γ',
- (β) η δεσμευμένη πιθανότητα η πρώτη ρίψη να είναι 'Κ' δεδομένου ότι στις πρώτες 10 ρίψεις εμφανίστηκαν 6 'Κ' και 4 'Γ',
- (γ) ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν δυο συνεχόμενες 'Κ'.

Θέμα 2. (3 βαθμοί) Από μια κάλπη, που περιέχει 100 διακριμένα σφαιρίδια που φέρουν τους αριθμούς $1, 2, \dots, 100$, επιλέγεται τυχαία ένα σφαιρίδιο. Έστω M η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στον αριθμό του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι M φορές, δηλαδή όσες φορές δείχνει ο αριθμός του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Οι διαδοχικές ρίψεις του ζαριού θεωρούνται ανεξάρτητες. Έστω Y το πλήθος των ρίψεων στις οποίες το ζάρι εμφάνισε την ένδειξη '1'. Να υπολογιστούν:

- (α) η πιθανότητα $P(M = m, Y = y)$, $m = 1, 2, \dots, 100$ και $y = 0, 1, 2, \dots, m$,
- (β) η πιθανότητα $P(Y = 0)$,
- (γ) η δεσμευμένη πιθανότητα $P(M = m | Y = 0)$, $m = 1, 2, \dots, 100$,
- (δ) η δεσμευμένη μέση τιμή $E[Y | M = m]$, $m = 1, 2, \dots, 100$,
- (ε) η μέση τιμή $E[Y]$.

Θέμα 3. (3 βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x + 3y^2) & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

- (α) η σταθερά c ,
- (β) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y ,
- (γ) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της X δοθέντος ότι $Y = y$,
- (δ) η πιθανότητα $P(X < Y)$,
- (ε) η μέση τιμή $E[5Y + 3]$.

Θέμα 4. (3 βαθμοί) Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 3, δηλαδή έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η N είναι ανεξάρτητη των X_1, X_2, \dots και έχει τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{5}$ δηλαδή συνάρτηση πιθανότητας

$$p_N(n) = P(N = n) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X_i , $i = 1, 2, \dots$
- (β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ και να βρεθεί τί κατανομή ακολουθεί η S_N .
- (γ) Έστω $S_{300} = \sum_{i=1}^{300} X_i$ Να υπολογιστεί προσεγγιστικά, με χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, η πιθανότητα $P(S_{300} \geq 100)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 $\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!
Ο τελικός βαθμός υπολογίζεται ως το $\min(\acute{\alpha}\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha \text{ βαθμ\acute{o}\nu\theta\eta\mu\acute{\alpha}\tau\omega\mu, 10)$.