

Θέμα 1ο: (α) Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 12 κάρτες. Από αυτές, 3 έχουν και τις δύο πλευρές κόκκινες, 4 έχουν και τις δύο πλευρές πράσινες και 5 έχουν μία πλευρά κόκκινη και μία πλευρά πράσινη. Επιλέγουμε στην τύχη μία κάρτα και ακολούθως βλέπουμε στην τύχη μία πλευρά της. Να υπολογιστούν:

- (1) (1 μον.) Η πιθανότητα να δούμε κόκκινη πλευρά.
 - (2) (1 μον.) Η πιθανότητα η κάρτα που επιλέχθηκε να έχει και τις δύο πλευρές κόκκινες δεδομένου ότι η πλευρά που είδαμε ήταν κόκκινη.
- (β) (1 μον.) Ρίχνουμε συνεχώς ένα συνηθισμένο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη «6». Να υπολογιστεί η μέση τιμή του αθροίσματος όλων των ενδείξεων που έφερε το ζάρι.

Θέμα 2ο: Έστω X, Y ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = 3e^{-3x}1_{\{x>0\}}, \quad f_Y(y) = 4e^{-4y}1_{\{y>0\}}.$$

- (1) (1 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(5 < X < 8 \mid X > 7)$.
- (2) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < Y)$.
- (3) (1 μον.) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της $\min(X, Y)$.
- (4) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $Z = 3X + 4Y$.

Θέμα 3ο: Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = cx^2e^{-3xy}1_{\{0 < x < 1, y > 0\}}.$$

- (1) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η σταθερά c .
- (2) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X .
- (3) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[Y \mid X = x]$.
- (4) (1 μον.) Να υπολογιστεί η $E[XY]$.

Θέμα 4ο: (α) Η τυχαία μεταβλητή X έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{7t}}{1 - t^2}, \quad |t| < 1.$$

- (1) (0.5 μον.) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (2) (1 μον.) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$P(X \leq 3) \leq \frac{1}{8}.$$

(β) (1 μον.) Αν οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_{50} είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με ροπογεννήτρια όπως στο ερώτημα (α), να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα

$$P(340 < X_1 + X_2 + \dots + X_{50} < 370).$$

$[\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9773, \Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(3) = 0.9987]$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!