25-5-2023

ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

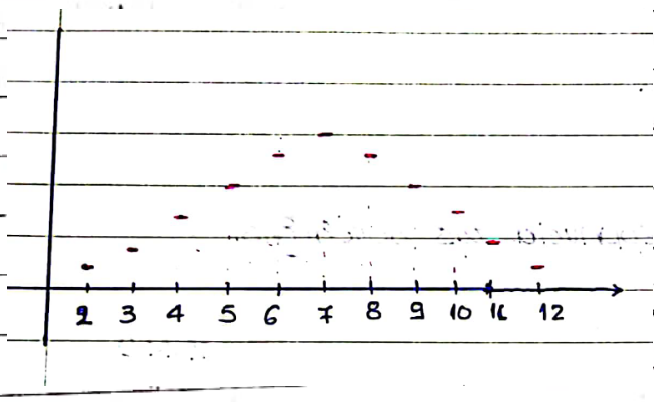
Μάθημα 24 – 25.05.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Βασιλική Μαυρογεώργου
Χρύσα Νούση

2] Άθροισμα ομοιομόρφων τ.μ.

$X \sim U[0,1]$, $Y \sim U[0,1]$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

Ποιά η κατανομή της $Z = X+Y$?

Λύση: Στο πρόβλημα των δυο ζαριών είχαμε υπολογίσει την κατανομή.



Ως άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. θα έχουμε:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η ολοκληρωτέα παράσταση είναι $\neq 0$

- $0 \le x \le 1$
- $0 \le z-x \le 1 \iff x \le z \le 1+x$

$\Rightarrow$ Έχει νόημα να κοιτάξουμε μόνο τις τιμές $z \in [0,2]$

- Θα διακρίνουμε περιπτώσεις αν

$$\begin{cases} 0 \le z \le 1 & (i) \\ 1 \le z \le 2 & (ii) \end{cases}$$

Περίπτωση (i):

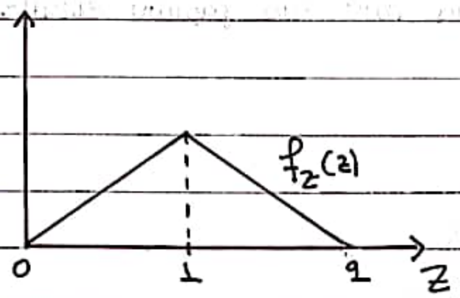
Θα έχουμε $f_X(x)\, f_Y(z-x) \neq 0$ ανν

$$0 < x < z \Rightarrow f_Z(z) = \int_0^z 1 \cdot 1\, dx = z$$

Περίπτωση (ii):

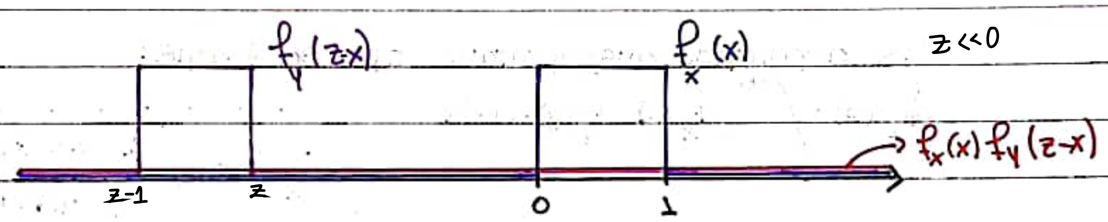
Θα έχουμε $f_X(x) f_Y(z-x) \neq 0$ αν

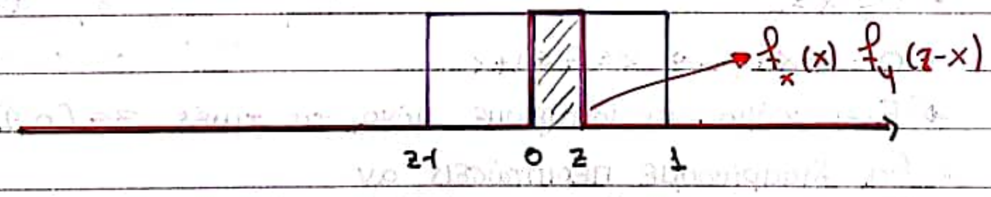
$$z-1<x<1 \Rightarrow f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} 1\cdot 1 \, dx = 2-z$$

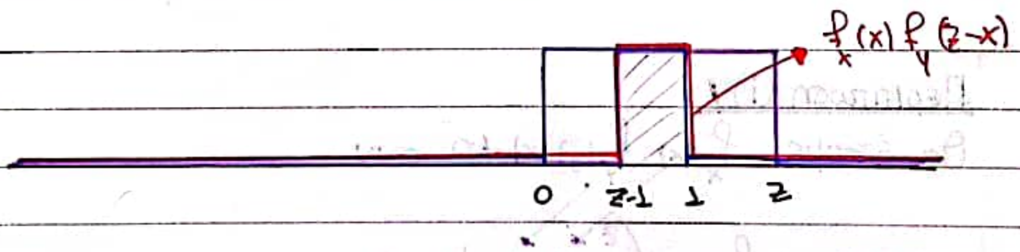


$$f_Z(z) = \begin{cases} z & z\in[0,1] \\ 2-z & z\in[1,2] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σημείωση: Γεωμετρική ερμηνεία της συνέλιξης:







③ Άθροισμα εκθετικών μεταβλητών

$X \sim Exp(\lambda_1)$ $Y \sim Exp(\lambda_2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

Ποια η κατανομή της $Z = X+Y$?

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{άλλως} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{άλλως} \end{cases}$$

Θα έχουμε $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$

Η ολοκληρωτέα παράσταση θα είναι θετική αν

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ z-x>0 \end{array}\right\} \iff 0<x<z$$

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)}\,dx$$

$$f_Z(z) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\,dx$$

$$f_Z(z) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \left. \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2-\lambda_1} \right|_0^z$$

$$f_Z(z) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}-1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 \dfrac{e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \text{αν } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda^2 e^{-\lambda z} z & \boxed{\text{αν } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda} \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

④ Άθροισμα Poisson μεταβλητών

ΠΡΟΣΟΧΗ: πλέον μιλάμε για διακριτές τ.μ.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \qquad X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$$

- $P_X(k) = e^{-\lambda_1} \dfrac{\lambda_1^k}{k!}$

- $P_Y(k) = e^{-\lambda_2} \dfrac{\lambda_2^k}{k!}$

Ποια η κατανομή της $Z = X+Y$;

$$P(Z=n) = P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P_X(k) P_Y(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}} \quad \text{ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1+\lambda_2)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{X+Y \sim \text{Pois}(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Σημ: $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$; $(X_1, \dots, X_n)_{\perp\!\!\!\perp} \Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim Poisson(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

(5) Άθροισμα διωνυμικών τ.μ.

$X \sim Binom(n, \underbrace{p) \quad Y \sim Binom(m, p}_{\text{κοινό } p})$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

- $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ • $p_Y(k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$

Ποια η κατανομή της $Z = X+Y$?

$$\mathbb{P}(Z=z) = \mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{k=0}^{z} \mathbb{P}(X=k, Y=z-k) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{k=0}^{z} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=z-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{z} p_X(k) p_Y(z-k) = \sum_{k=0}^{z} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{m}{z-k} p^{z-k} (1-p)^{m-z+k}$$

$$= \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{z} \binom{n}{k}\binom{m}{z-k}\right]}_{¿=\binom{n+m}{z}?} p^z (1-p)^{n+m-z} =$$

Τρόπος $1^{ος}$: Επαγωγή

Τρόπος $2^{ος}$: Συνδυαστική

Θα βρούμε 2 προβλήματα απαρίθμησης που δείχνουν τις εκφράσεις που θέλουμε ν.δ.ό. είναι ίσες

- $\binom{n}{k} \rightsquigarrow$ επιλέγω k από n άσπρες μπάλες
- $\binom{m}{z-k} \rightsquigarrow$ επιλέγω $z-k$ από m μαύρες μπάλες
- $\binom{n+m}{z} \rightsquigarrow$ επιλέγω z από $n+m$ μπάλες ανεξαρτήτως χρώματος

Συνολικός # τρόπων επιλογής z από (n+m) υπάλλ. είναι ίσος με

= # 0 άσπρες κ' z γαλάζιες
+ # 1 άσπρη κ' z-1 γαλάζιες
+ # 2 άσπρες κ' z-2 γαλάζιες
⋮
+ # k άσπρες κ' z-k γαλάζιες
⋮
+ # z άσπρες κ' 0 γαλάζιες

$$= \sum_{k=0}^{z} \binom{n}{k}\binom{m}{z-k} = \binom{n+m}{z}$$

Τρόπος 3ος :

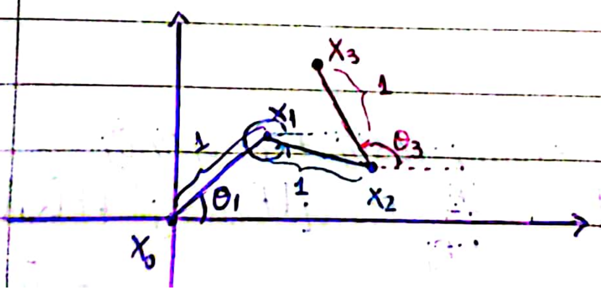
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$$\left.\begin{matrix} n+m=7 & n=4 \\ z=2 & m=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \binom{4}{0}\binom{3}{2} + \binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{4}{2}\binom{3}{0}$$

$$= \binom{7}{2}$$

~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

Παράδειγμα 2ιβ (Ross) : Τυχαίος Περίπατος στο επίπεδο.



Επιλέγουμε σε κάθε βήμα μια γωνία $\theta_i \sim U_{[0,2\pi]}$ (ανεξάρτητες).
Το εκάστοτε βήμα είναι $X_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$

Η θέση μετά από n βήματα είναι $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

⇝ Να βρεθούν τα $E[S_n]$, $Var[S_n]$

$$S_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i , \sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i\right)$$

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$E[X_i] = E[(\cos\theta_i , \sin\theta_i)].$$

Αφού $\theta_i \sim \mathcal{U}[0,2\pi]$

- $E[\cos\theta_i] \overset{\text{LOTUS}}{=} \int_0^{2\pi} \cos\theta_i \cdot f_\theta(\theta_i)\, d\theta_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta_i\, d\theta_i = \frac{1}{2\pi} \cdot 0 = 0$
- $E[\sin\theta_i] = 0$

Άρα έχουμε ότι $E[X_i] = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$

* ΠΡΟΣΟΧΗ! Μιλάμε για δ/κή μεταβλητή

▶ $E[S_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = 0$

$$Var(S_n) \overset{*}{=} E\left[\|S_n\|^2\right] - \|E[S_n]\|^2$$

$$S_n^2 = (X_1 + \dots + X_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j$$

$$\Rightarrow E[S_n^2] = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2]}_{n} + \sum_{i \neq j} E[X_i X_j] \quad (*)$$

ακριβώς όπως στις συνδιακυμάνσεις

- $X^2 = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Άρα $\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] = n$

$X_i X_j = (\cos\theta_i, \sin\theta_i) \cdot (\cos\theta_j, \sin\theta_j) = \cos\theta_i \cdot \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j$

$E[X_i X_j] = E[\cos\theta_i \cdot \cos\theta_j] + \dots \overset{i \neq j}{\underset{\theta_i \neq \theta_j}{=}} E[\cos\theta_i] E[\cos\theta_j] + E[\sin\theta_i] E[\sin\theta_j] = 0$

▶ Άρα $Var[\ S_n\ ] = n$

> Άρα, κατά μέσο όρο η <u>θέση</u> του περιπατητή θα είναι <u>0</u>, αλλά η μέση απόσταση απ' το 0 θα είναι $= \sqrt{n}$

Scanned with CamScanner