Μάθημα 19 – 09.05.2023
ΓΡΑΦΕΑΣ
Θανάσης Κανελλάκης

Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις

[Κεφ 7.7, Ross]

Υπενθύμιση

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \Rightarrow a_n = f^{(n)}(0)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

[$\Rightarrow$ Αν $M(t) = e^{tx}$, τότε $\left.\frac{d^n}{dt^n}\right|_{t=0} M(t) = x^n \ \forall n$]

Αν στη θέση του x έχουμε μία τυχαία μεταβλητή X, τότε

μπορούμε να θεωρήσουμε τη παράσταση

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2}{2!}X^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}X^n + \dots$$

Θεωρούμε $M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[1] + t\,\mathbb{E}[X] + \dots + \frac{t^n}{n!}\mathbb{E}[X^n]$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^n] = \left.\frac{d^n}{dt^n}\right|_{t=0} M(t)$$

• Η n-στή ροπή μιας Τυχαίας Μεταβλητής X είναι η $\mu_n = E[X^n]$

→ Παράδειγμα 1: Αν $n=1$, $\mu_1 = E[X]$ δηλαδή η πρώτη ροπή της X είναι η μέση τιμή της

→ Παράδειγμα 2: Αν $n=2$, $\mu_2 = E[X^2]$ οπότε η διαφορά της X είναι $Var(X) = \mu_2 - \mu_1^2$

* Moment-generating Funtion

• Ως ροπογεννήτρια συνάρτηση της X ορίζεται η $M(t) = E[e^{tX}]$ με την προϋπόθεση ότι η $M(t)$ είναι πεπερασμένη σε μία περιοχή του $t=0$.

• Ο ορισμός δεν διακρίνει ανάμεσα σε συνεχείς ή διακριτές τ.μ.

Συγκεκριμένα $M(t) = \begin{cases} \sum_{x \in X} \underbrace{p(x)}_{\text{σμπ της } X} e^{tx}, & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)}_{\text{σππ της } X} e^{tx} dx & X \text{ συνεχ.} \end{cases}$

• Σχέση ανάμεσα σε ροπές και ροπογεννήτρια συνάρτηση (ΡΓΣ)

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}\Big|_{t=0} M(t) = \mu_n = \mathbb{E}[X^n]}$$

ή πιο συγκεκριμένα

$$\boxed{M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} t^n}$$

για t σε μια περιοχή του 0

• Πότε έχουμε δικαίωμα να εναλλάξουμε παραγώγιση και μέση τιμή → (άπειρο) άθροισμα → ολοκλήρωμα

Συγκεκριμένα, πότε μπορούμε να πούμε ότι

$$\to \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t) \quad \underline{?!}$$

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης
Dominated Convergence Theorem

→ Ολοκληρωτική μορφή:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx \quad \underline{?!}$$

Παραδείγματα και υπολογισμοί

- Διωνυμική κατανομή

$$M(t) = \sum_{x \in X} p(x) e^{tx}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{tk}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k}$$

Από διωνυμικό θεώρημα

$$= [e^t p + 1-p]^n$$

$\Rightarrow$ Η ΡΓΣ της διωνυμικής είναι
$M(t) = [1-p+pe^t]^n$

$\Rightarrow$ Μέση τιμή $\mu_1 = M'(0) =$

$$\left.\begin{array}{l} \\ M'(t) = n[1-p+pe^t]^{n-1} \cdot pe^t \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow M'(0) = np$

Δεύτερη Ροπή

$$M''(t) = np[e^t[1-p+pe^t]^{n-1} + e^t(n-1)[1-p+pe^t]^{n-2} pe^t].$$

$\Rightarrow \quad M''(0) = np[(n-1)p + 1] = n^2p^2 - np^2 + np$

$Var(X) = M_2 - M_1^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$
$= np - np^2 = np(1-p)$

- Κατανομή Poisson:

$$M(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{kt}$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} \exp(\lambda e^t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

- Μέση Τιμή $\quad M_1 = M'(0) = E[X]$

$M'(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)) \cdot \lambda e^t$

$M'(0) = \exp(0) \cdot \lambda e^0 = \lambda$

Δεύτερη Ροπή: $E[X^2] = M_2 = M''(0)$

$M''(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)) \cdot \lambda e^t \cdot \lambda e^t + \exp(\lambda(e^t - 1)) \cdot \lambda e^t$

$M''(0) = \lambda^2 + \lambda$

Διασπορά

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Κατανομή Γεωμετρική

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p e^{kt}$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)e^t)^k$$

$$= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

· Ομοιόμορφη Κατανομή

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{tx} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{1}{t} e^{tx} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{1}{t} e^{tx} \Big|_a^b$$

$$= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

Η έκφραση ισχύει για $t \neq 0$, Για $t=0$ έχουμε $M(0) = 1$ που συμφωνεί με το όριο

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

$$M'(t) = \frac{(be^{tb} - ae^{ta})t - (e^{tb} - e^{ta})}{t^2}\,\frac{1}{b-a}$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{be^{tb} - ae^{at}}{t} - \frac{e^{bt} - e^{at}}{t^2}\right]$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα $M'(0)$, $M''(0)$ κανονικά, αλλά η διαδικασία απαιτεί πολλές πράξεις

- <u>Κανονική κατανομή</u>

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, e^{tx}\, dx$$

$$-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx = -\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 tx}{2\sigma^2} =$$

$$= -\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 t x}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + (\mu + \sigma^2 t)^2 - (\mu + \sigma^2 t)^2 + \mu^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{(x - (\mu + \sigma^2 t))^2 + \mu^2 - \mu^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{(x - (\mu + \sigma^2 t))^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

$$\Rightarrow M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(\mu+\sigma^2 t))^2}{2\sigma^2}} e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} dx$$

$$= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(\mu+\sigma^2 t))^2}{2\cdot\sigma^2}} dx$$

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

• <u>Μέση Τιμή</u>: $E[X] = M_1 = M'(0)$

$$M'(t) = (\mu + \sigma^2 t) e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \Rightarrow M'(0) = \mu$$

$$E[X] = \mu$$

• <u>Δεύτερη Ροπή</u>:

$$E[X^2] = M_2 = M''(0)$$

$$M''(t) = \sigma^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow M''(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = M_2 - M_1^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Scanned with CamScanner

• Εκθετική Κατανομή

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{tx} dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx$$

$$= \lambda \frac{(-1)}{\lambda - t} e^{-(\lambda - t)x} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}(1 - 0) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

• Μέση Τιμή $E[X] = M_1 = M'(0)$

$$M'(t) = -\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \Rightarrow M'(0) = \frac{1}{\lambda}$$

• Δεύτερη Ροπή: $E[X^2] = M''(0)$

$$M''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$