Μάθημα 21 – 16.05.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Χρυσούλα Βαλινού (Σετ 1)
Κατερίνα Δερβένη (Σετ 2)

16/05/2023

Συνέχεια παραδείγματος 1.δ από Ross

Δίνεται η τ.μ. με από κοινού κατανομή

$$f(x,y) = \begin{cases} c & , \text{αν } x^2+y^2 \le R^2 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

① Προσδιορισμός του $c \rightarrow c = \dfrac{1}{\pi R^2}$

② Περιθώριες των X, Y : $f_X(x) = \dfrac{2}{\pi R^2} \begin{cases} \sqrt{R^2 - y^2} & , |y| \le R \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

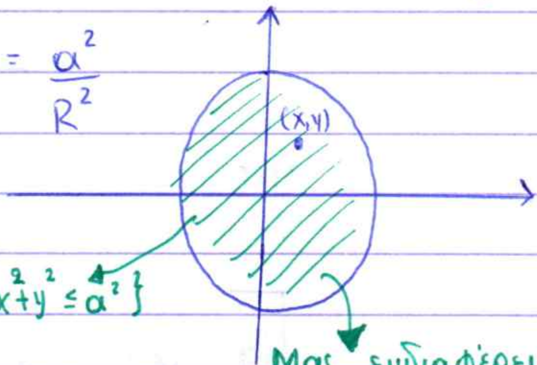
$$f_Y(y) = \dots$$

③ Κατανομή και μέση τιμή της $D = \sqrt{X^2+Y^2}$

Τρόπος Α': Υπολογισμός της αθροιστικής κατανομής $F_D(A)$ της $D = \sqrt{X^2+Y^2}$

$$F_D(a) = \mathbb{P}(D \le a) = \mathbb{P}(X^2+Y^2 \le a^2) \left[= \mathbb{P}\{\omega : X^2(\omega) + Y^2(\omega) \le a^2\}\right]$$

$$= \iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D(a)} dx\,dy = \frac{\pi a^2}{\pi R^2} = \frac{a^2}{R^2}$$



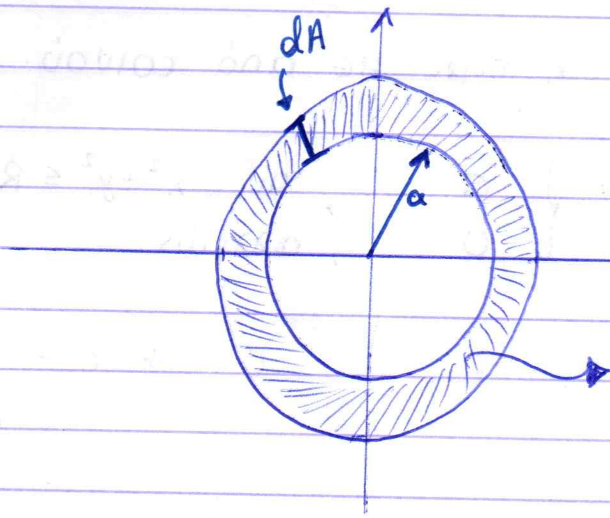
$D(a) = \{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\}$

Μας ενδιαφέρει το ενδεχόμενο $X^2+Y^2 \le a^2$

Επομένως, η σ.π.π. της $D = \sqrt{X^2+Y^2}$:

$$\boxed{f_D(a) = F_D'(a) = \frac{2a}{R^2}}$$

ΤΡΟΠΟΣ Β': Υπολόγισμό της σ.π.π. $f_D(a)$ της $D=\sqrt{X^2+Y^2}$



dA = εμβαδόν απειροστού δακτυλίου ακτίνας a και πάχους da

$$f_D(a)\,da = \mathbb{P}(a \le D \le a+da)$$

$$= \mathbb{P}(a \le \sqrt{X^2+Y^2} \le a+da)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi R^2}}_{f(x,y)} \cdot dA = \frac{2\cancel{\pi} a}{\cancel{\pi} R^2}\, dA$$

$$\Rightarrow \boxed{f_D(a) = \frac{2a}{R^2}}$$

Άρα $F_D(a) = \int f_D(a)\,da = \dfrac{a^2}{R^2}$

(*) $dA = \pi(a+da)^2 - \pi a^2 = \cancel{\pi a^2} + 2\pi a\,da + \cancel{(da)^2} - \cancel{\pi a^2}$

$= 2\pi a\,da$

⚠ Συμπέρασμα - Παρατήρηση:

Και στις 2 περιπτώσεις, ο υπολογισμός έχει βάση σαν $a \leq R$. Αν $a > R$ έχουμε $f_D(a) = 0$ κ' $F_D(a) = 1$

Συνολικά:

$f_D(a) = \begin{cases} \frac{2a}{R^2} & , a \leq R \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$	$F_D(a) = \begin{cases} \frac{a^2}{R^2} & , a \leq R \\ 1 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

Μέση τιμή της ακτίνας $D = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$E[D] \overset{LOTUS}{=\!=} \int_0^R r f_D(r)\,dr = \int_0^R r \cdot \frac{2r}{R^2}\,dr$$

$$= \frac{2}{R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{3}\Big|_0^R = \frac{2}{3}R$$

ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ - ΣΥΝΟΨΗ

	ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ	ΣΥΝΕΧΕΙΣ
Από κοινού (αθρ) κατανομή	$F(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$	
Σ.Μ.Π.	$p(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)$	—
Σ.Π.Π.	—	$\mathbb{P}(x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy) = f(x,y)\,dx\,dy$ ‖ $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$
ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ	$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \sum_{x\in A} \sum_{y\in B} p(x,y)$	$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy$
ΠΕΡΙΘΩΡΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ	<u>Σ.Μ.Π.</u>: • $p_X(x) = \sum_{y\in Y} p(x,y)$ • $p_Y(y) = \sum_{x\in X} p(x,y)$	Σ.Π.Π. • $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ • $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Γενικά, θα λέμε ότι "δύο { τ. μεταβλητές / ενδεχόμενα

είναι ανεξάρτητες (-α) όταν η τιμή/πραγματοποίηση της μιας δεν συνεπάγεται κάτι για την άλλη".

Στην περίπτωση των ενδεχομένων έχουμε:

$$\boxed{A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

ανεξαρτησία

Ιδέα: { σπη / σμπ } → πιθανότητες μέσω ενδεχομένων { ολοκλήρωσης / άθροισης }

Αντιστρόφως, αν γνωρίζουμε τις πιθανότητες

$F_X(x) = \mathbb{P}(\underbrace{X \leq x}_{\text{ενδεχόμενο}})$ γνωρίζουμε τα πάντα για την X

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ γνωρίζουμε τα πάντα για την Y.

Έστω οι οικογένειες ενδεχομένων:

$A_x = \{X \leq x\} = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$

$B_y = \{Y \leq y\} = \{\omega : Y(\omega) \leq y\}$

Τότε $A_x \perp\!\!\!\perp B_y \Leftrightarrow \mathbb{P}(A_x \cap B_y) = \mathbb{P}(A_x) \cdot \mathbb{P}(B_y)$

$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y)$

Ορισμός:

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{P})$.

Τότε δύο τ.μ. $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ θα λέγονται (στοχαστικά) ανεξάρτητες όταν:

$$\boxed{F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall\, x, y}$$

όπου $F(x,y)$: από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y

$F_X(x), F_Y(y)$: αντίστοιχες περιθώρειες.

Σημείωση 1: Αν X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Σημείωση 2: Ο ορισμός γενικεύεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος τ.μ. $X_1, \dots, X_n$:

Θα λέμε ότι $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες ανν:

εξ' ορισμού: $F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$

και θα γράφουμε: $(X_1, \dots, X_n)_{\perp\!\!\!\perp}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1α (συνεχής):

Αν X, Y συνεχείς τ.μ.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \underbrace{\boxed{f(x,y)}}_{\text{σ.π.π}} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1β (διακριτή):

Αν X, Y διακριτές τ.μ.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \underbrace{\boxed{p(x,y)}}_{\text{σ.μ.π.}} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

Απόδειξη:

1α. $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\Rightarrow F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ εξ' ορισμού

Γνωρίζουμε επίσης, ότι $f(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$

"II" $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_X(x) \cdot F_Y(y) \overset{\text{παραγωγίζω ως προς } y}{=} \dfrac{\partial}{\partial x} \left[F_X(x) \cdot F_Y'(y)\right] = F_X'(x) \cdot F_Y'(y)$

$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Θα δείξουμε πιο γενικά το εξής κριτήριο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2:

Αν X, Y συνεχείς τ.μ. με από κοινού σ.π.π. $f(x,y) = h(x)\cdot g(y)$ τότε $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Απόδειξη:

Από την στιγμή που $f(x,y) = h(x)\cdot g(y)$ έχουμε:

περιθώρεια της X: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,dv\,du$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot g(v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{x} h(u)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,dv\right)du$$

$$= G\cdot\int_{-\infty}^{x} h(u)\cdot du$$

(Εντελώς ανάλογα προκύπτει: $F_Y(y) = \underbrace{H}_{\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,du}\cdot\int_{-\infty}^{y} g(v)\cdot dv$)

Τέλος έχουμε ότι για την από κοινού ισχύει:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} h(u)\cdot g(v)\,dv\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{x} h(u)\cdot du\cdot\int_{-\infty}^{y} g(v)\cdot dv = \frac{F_X(x)}{G}\cdot\frac{F_Y(y)}{H}$$

Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι: $1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\cdot g(y)\,dy\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx}_{H} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy}_{G}$$

$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)}$, QED

Παράδειγμα 2) σε Ross

Δίνονται 2 συνεχείς τ.μ. X, Y με από κοινού σ.π.π.:

→ **περίπτωση 1:** $f(x,y) = 6\cdot e^{-2x}\cdot e^{-3y}$, $x\in(0,\infty)$, $y\in(0,\infty)$

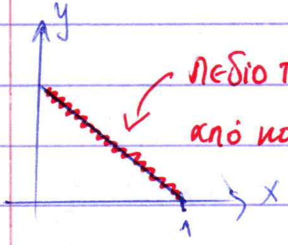
Είναι $X \perp\!\!\!\perp Y$?

Λύση: Με βάση το κριτήριο ανεξαρτησίας της Π2 έχουμε $f(x,y) = \underbrace{e^{-2x}}_{h(x)} \cdot \underbrace{e^{-3y}}_{g(y)}$

Συμπεραίνουμε ότι: $X \perp\!\!\!\perp Y$.

→ **περίπτωση 2:** όπως παραπάνω $x, y > 0$, $x + y = 1$

Είναι $X \perp\!\!\!\perp Y$?



Στην πραγματικότητα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν θα προκύψει να είναι της μορφής: $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ αλλά θα έχουμε: $f(x,y) = 0$ οποτεδήποτε $x + y \neq 1$.

⇒ **ΠΡΟΣΟΧΗ:**

① Το κριτήριο της Πρότασης 2 δεν εφαρμόζεται

② Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

16/5/23

Συνέχεια Παρ. 1δ από Ross

Δίδεται η τμ με από κοινού κατανομή

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & \text{αν } x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

1) Προσδιορίστε την c $\rightsquigarrow$ $c = \dfrac{1}{\pi \cdot R^2}$

2) Περιθώριες των X, Y $\quad f_X(x) = \dfrac{2}{\pi R^2} \begin{cases} \sqrt{R^2-y^2}, & |y| \leq R \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \dots$$

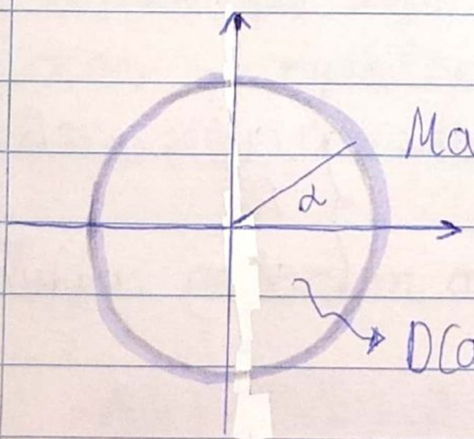
3) Κατανομή και μέση τιμή της $D = \sqrt{X^2+Y^2}$

Τρόπος Α

Υπολογισμός της αθροιστικής κατανομής

$D = \sqrt{X^2+Y^2}$

$\mathbb{F}_D(a) = \mathbb{P}(D \leq a) = \mathbb{P}(X^2+Y^2 \leq a^2)$ $[= \mathbb{P}\{\omega : X^2(\omega)+Y^2(\omega) \leq a^2\}]$



Μας ενδιαφέρει το ενδεχόμενο $X^2+Y^2 \leq a^2$

$D(a) = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq a\}$

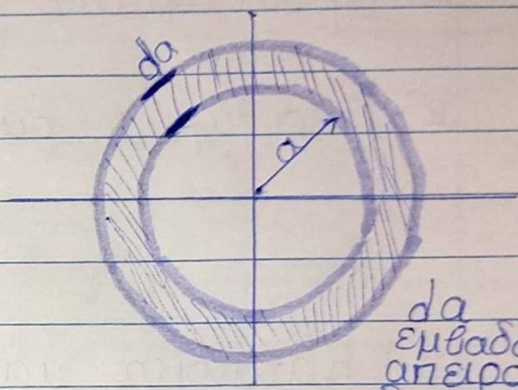
$$= \iint_{D(a)} f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{D(a)} dxdy = \frac{\pi a^2}{\pi R^2} = \frac{a^2}{R^2}$$

Άρα η σππ της $D=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad f_D(a) = F_D'(a) = \frac{2a}{R^2}$

Τρόπος Β

Υπολογισμός σππ $f_D(a)$ της $D=\sqrt{x^2+y^2}$

$$f_D(a)da = \mathbb{P}(a\le D\le a+da)$$
$$= \mathbb{P}(a\le\sqrt{x^2+y^2}\le a+da)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi R^2}}_{f(x,y)} dA = \frac{2\pi a}{\pi R^2}da$$



da εμβαδόν απειροστού δακτυλίου

$f_D(a)=\frac{2a}{R^2} \qquad F_D(a)=\int f_D(a)\,da = \frac{a^2}{R^2}$

★ $dA = \pi(a+da)^2 - \pi a^2 = \cancel{\pi a^2} + 2\pi a\,da + \cancel{(da)^2} - \cancel{\pi a^2} = 2\pi a\,da$

Και στις δυο περιπτώσεις ο υπολογισμός έχει βάση αν $a\le R$. Αν $a>R$ έχουμε $f_D(a)=0$ κ $F_D(a)=1$

Τελικά

$$f_D(a) = \begin{cases} \frac{2a}{R^2}, & a\le R \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad F_D(a) = \begin{cases} \frac{a^2}{R^2} & a\le R \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Μέση τιμή της ακτίνας $D=\sqrt{X^2+Y^2}$

$$\mathbb{E}[D] \overset{\text{Lotus}}{=} \int_0^R r f_D(r)\,dr = \int_0^R r \frac{2r}{R^2}\,dr =$$

$$= \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R = \frac{2}{3}\cdot R$$

	Διακριτές	Συνεχείς
Από κοινού (ΑΘΡ) Κατανομή	$F(x,y)=\mathbb{P}(X\leq x, Y\leq y)$	
ΣΜΠ	$p(x,y)=\mathbb{P}(X=x, Y=y)$	—
ΣΠΠ	—	$p(x\leq X\leq x+dx, y\leq Y\leq y+dy)$ $=f(x,y)\,dx\,dy$ $\Vert$ $f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$
Μέτρο Πιθ/τας	$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B)=\sum_{x\in A}\sum_{x\in B} p(x,y)$	$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B)=\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy$
Περιθώριες Κατανομές	ΣΜΠ $p_X(x)=\sum_{y\in Y} p(x,y)$ $p_Y(y)=\sum_{x\in X} p(x,y)$	ΣΠ.Π $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

Ανεξαρτησία τυχ. μεταβλητών

Γενικά θα λέμε ότι δύο {ενδεχόμενα / τμ} είναι ανεξάρτητες (-α) όταν η τιμή/πραγματ/ση της μιας δεν συνεπάγεται κάτι για την άλλη."

Στην περίπτωση των ενδεχομένων έχουμε

$$A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{εξ/ορ}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

↑ανεξάρτητο

Scanned with CamScanner

Ιδέα: $\left\{\begin{matrix} \text{σπη} \\ \text{σμπ} \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow$ πιθ/τες μέσω ενδεχομένων $\left\{\begin{matrix} \text{ολοκλήρωσης} \\ \text{άθροισης} \end{matrix}\right\}$

Αντιστρόφως αν γνωρίζαμε τις πιθ/τες

$F_X(x) = \mathbb{P}(\underbrace{X \leq x}_{\text{ενδεχομενο}})$ γνωρίζουμε τα πάντα για την X

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ γνωρίζαμε τα πάντα για την Y

Εστω οι οικογένειες ενδεχομένων

$A_x = \{X \leq x\} = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$
$B_y = \{Y \leq y\} = \{\omega : Y(\omega) \leq y\}$

τότε $A_x \perp\!\!\!\perp B_y \Rightarrow \mathbb{P}(A_x B_y) = \mathbb{P}(A_x) \cdot \mathbb{P}(B_y)$

$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y < y)$

Ορισμός: Εστω χώρος πιθανοτητας (Ω, P) Τότε δυο τμ $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ θα λέγονται (στοχαστικά) ανεξάρτητες όταν
$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \forall x,y$

οπου $F(x,y)$ η απο κοινού συναρτ. κατανομής των X, Y
οπου $F_X(x)$, $F_Y(y)$ οι αντιστοιχες περιθάριες

Σημ. 1: Αν X, Y ανεξάρτητες γράφαμε $X \perp\!\!\!\perp Y$
Σημ. 2: Ο ορισμός γενικεύεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος τμ $X_1, \dots, X_n$:

Scanned with CamScanner

Θα λέμε ότι $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες αν εξ. ορ.

$$\boxed{F(x_1, \dots, x_N) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)}$$

οπότε θα γράφουμε : $(X_1, \ , X_n)_{\perp\!\!\!\perp}$

Πρόταση: 1α (συνεχής):

Αν X, Y συνεχείς τμ τότε $X \perp\!\!\!\perp Y \iff f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

σ.π.π

Πρόταση 1β (διακριτή):

Αν X, Y διακριτές τμ τότε $X \perp\!\!\!\perp Y \iff p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

σ.μ.π

Απόδειξη (1α):

▸ $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\Rightarrow F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ εξ ορισμού

Γνωρίζουμε ότι $f(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) =$

$\overset{\text{"}\perp\!\!\!\perp\text{"}}{=} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_X(x) F_Y(y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[F_X(x) F_Y'(y)\right] = F_X'(x) \cdot F_Y'(y)$

$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Θα δω πιο γενικά το εξής κριτήριο

Πρόταση 2: Α X, Y συνεχείς τμ με απο κοινού σππ $f(x,y) = h(x)g(y)$ $X \perp Y$

Απόδειξη:

Απο την στιγμή που $f(x,y) = h(x)g(y)$ έχουμε

περιθώρια της X $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv =$

$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)g(u)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{x} h(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(v)dv\right)du =$

$G\int_{-\infty}^{x} h(u)du$

Τέλος έχουμε: ότι για την απο κοινού ισχύει:

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} h(u)g(v)\,dudv =$

$\int_{-\infty}^{x} h(u)du \cdot \int_{-\infty}^{y} g(v)dv = \frac{F_X(x)}{G} \cdot \frac{F_Y(y)}{H}$

$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(y)\,dy\,dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = H \cdot G$

$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

Scanned with CamScanner

- $F_Y(y) = \underbrace{H}_{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,du} \cdot \int_{-\infty}^{y} g(u)\,du$

Παράδειγμα 2ος (Ross): Δίνονται δυο συνεχείς τ.μ X, Y με απο κοινού σππ:

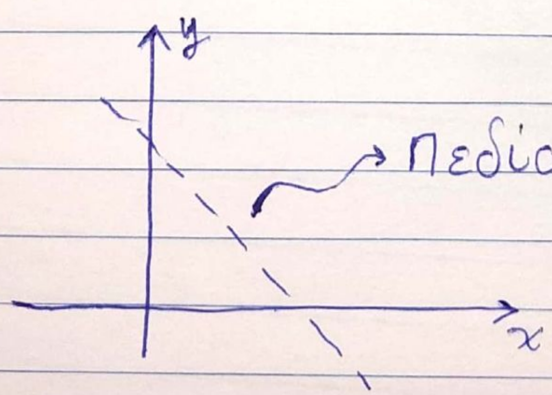
Περίπτωση 1η: $f(x,y) = 6 \cdot e^{-2x} \cdot e^{-3y}$
$x \in (0, \infty)$ $y \in (0, \infty)$

Περίπτωση 2η: $f(x,y)$ όπως παραπάνω $x, y > 0$, $x+y=1$

Είναι $X \perp\!\!\!\perp Y = ?$

Λύση:
Με βάση το κριτήριο ανεξαρτησίας της Π2 έχουμε
$f(x,y) = \underbrace{e^{-2x}}_{h(x)} \cdot \underbrace{e^{-3y}}_{g(y)}$
παίρναμε ότι $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Περ 2:



Πεδίο τιμών απο κοινού

Στην πραγματικότητα η συνάρτηση πυκνότητας πιθ/τας δεν θα προκύπτε να είναι της μορφής

$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

αλλά θα έχουμε $f(x,y)=0$ οποιοσδήποτε $x+y \neq 1$

★ ★ ★

Προσοχή:

1) Το κριτήριο της ΠΣ δεν εφαρμόζεται
2) οι x, y δεν είναι ανεξάρτητες