ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Μάθημα 20 – 11.05.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Βασιλική Μαυρογεώργου
Νικολέτα Ποθητού

ΡΓΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ:

σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a,b] \\ 0 & , \text{άλλως} \end{cases}$

$$M(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}\,dx = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} \quad *$$

* Η έκφραση αυτή ισχύει για $t \neq 0$.
Για $t=0$ έχουμε $M(0)=1$ που συμφωνεί με το όριο $\lim_{t\to 0} M(t)$ από de l'Hôpital.

$$M'(t) = \frac{(be^{bt}-ae^{at})t-(e^{tb}-e^{ta})}{t^2}\cdot\frac{1}{b-a}$$

$$M'(t) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{be^{bt}-ae^{at}}{t} - \frac{e^{bt}-e^{at}}{t^2}\right)$$

$M''(t)$ = πράξεις $\boxed{X}$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα $M'(0)$ κ' $M''(0)$ αλλά η διαδικασία είναι κάπως επίπονη.

Εναλλακτικός Τρόπος Υπολογισμού / Χειρισμού:

Βασικά αναπτύγματα Taylor:

- $e^x = 1 + \boxed{x} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- $\sin x = 0 + \boxed{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + \boxed{x} + x^2 + \dots$
- $\log(1+x) = 0 + \boxed{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

⇝ ο σταθερός όρος (αν υπάρχει) είναι η τιμή της συνάρτησης στο $x=0$

⇝ Οι πρωτοβάθμιοι όροι (όπου υπάρχουν) είναι η 1η παράγωγος κ.ο.κ.

$$M(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1 + bt + \frac{b^2t^2}{2!} + \frac{b^3t^3}{3!} - \left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!}\right) + O(t^4)}{t}$$

GARBAGE COLLECTION
αμελητέοι όροι για t σε μια περιοχή του 0.

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{\left[(b-a)\cancel{t} + \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)t^{\cancel{2}} + \left(\frac{b^3-a^3}{3!}\right)\cdot t^{\cancel{3}\,2} + O(t^{\cancel{4}\,3})\right]}{\cancel{t}}$$

$$= 1 + \frac{a+b}{2}t + \frac{a^2+ab+b^2}{6}t^2 + O(t^3)$$

Από τον ορισμό της ΡΓΣ:

$$M(t) = 1 + M_1 t + \frac{M_2}{2!}t^2 + \dots$$

Οπότε συγκρίνοντας συντ/στές προκύπτει ότι:

$$E[X] = \mu_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$E[X^2] = \mu_2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

⤳ Ερώτηση: Ποια συνάρτηση έχει ως ΡΓΣ την $M(t) = \frac{\boxed{2}^{?}}{b-a} \cdot \frac{e^{tb} - e^{at}}{t}$

* Παρατήρηση: Το αντίστροφο πρόβλημα του προσδιορισμού μιας σ.π.π. δοθείσης της ΡΓΣ είναι αρκετά δύσκολο εν γένει κ' απαιτεί τη χρήση του λεγόμενου αντίστροφου μετ/μου Laplace.

[Η ΡΓΣ είναι "σχεδόν" (λόγω προσήμου) ο μετ/σμος Laplace της σ.π.π.]

ΠΡΟΣΟΧΗ !!! ΕΡΩΤΗΣΗ ΠΑΓΙΔΑ

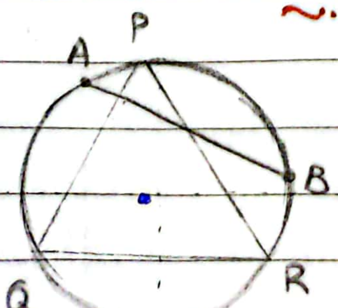
ΔΕΝ υπάρχει σ.π.π. που να δίνει τη δεδομένη ΡΓΣ

$M(0) = 2$

Θυμόμαστε ότι $M(t) = E[e^{tX}] \Rightarrow M(0) = E[1] = 1$.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΩΣΤΕ $M(t)$ ΡΓΣ : $M(0) = 1$.

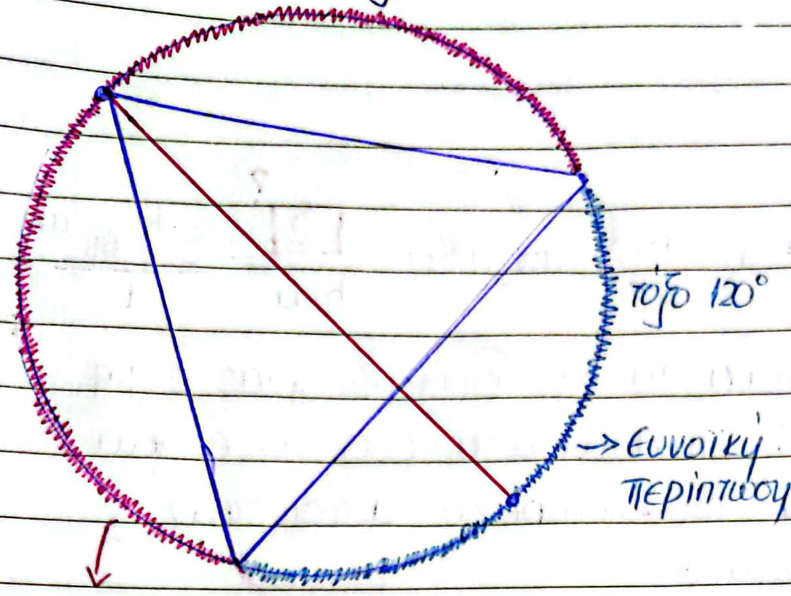
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ BERTRAND



- κύκλος ακτίνας 1.
- Έστω μια τυχαία χορδή στον κύκλο.
- Πόσο μεγάλη είναι αυτή η χορδή;

⤳ Πόσο πιθανό είναι η χορδή να είναι μεγαλύτερη απ' την πλευρά του τριγώνου; (το $P\hat{Q}R$ ισόπλευρο)

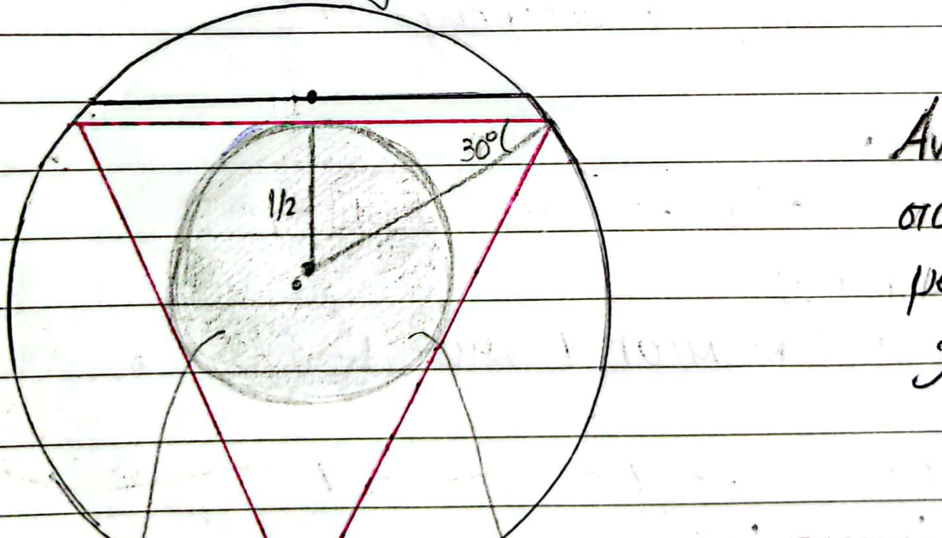
1η ιδέα: Επιλέγω τυχαία δυο σημεία πάνω στον κύκλο.



$P = 1/3$

αν το σημίο βρίσκεται εδώ, τότε η χορδή < πλευρά τριγώνου

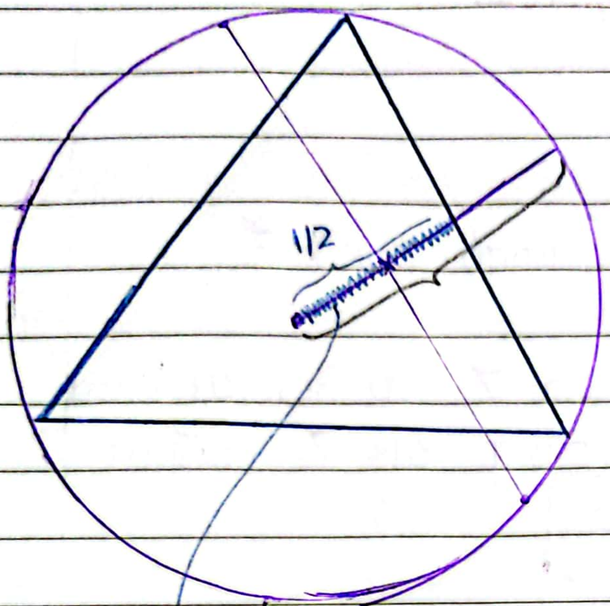
2η ιδέα: Επιλέγουμε ένα σημίο στον κύκλο ως μέσο της χορδής



Αν το μέσο βρίσκεται στο εσωτερικό του εγγεγραμμένου κύκλου, τότε χορδή > πλευρά τριγώνου

$$\left.\begin{aligned} E_{\varepsilon\gamma\gamma} &= \pi\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \\ E_{\alpha\rho\chi} &= \pi\cdot(1)^2 = \pi \end{aligned}\right\} \longrightarrow P = \frac{1}{4}$$

3^{η} ιδέα: Επιλέγουμε τυχαία μια ακτίνα κ' ένα σημείο πάνω στην ακτίνα. Φέρουμε τη χορδή που τέμνει κάθετα την ακτίνα στο εν λόγω σημείο.

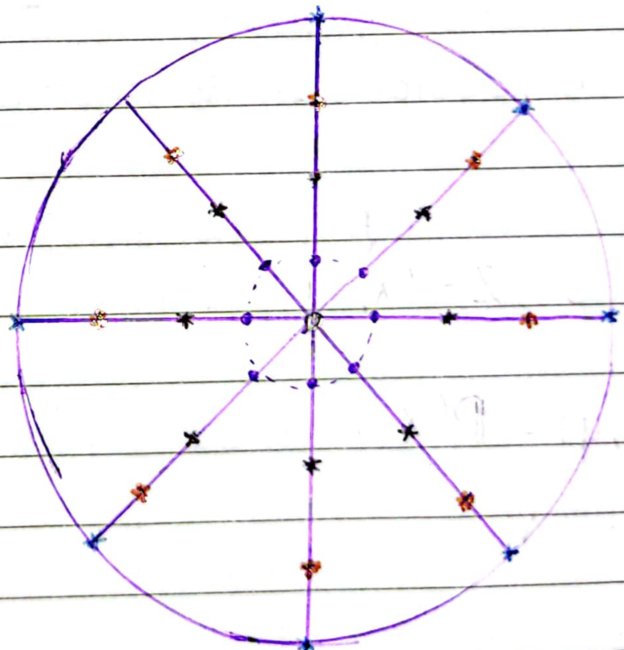


Ευνοϊκή περίπτωση $P = 1/2$

$\theta \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\}$

$r \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

Σβήνοντας τον κύκλο, παρατηρούμε ότι τα σημεία προς το κέντρο είναι πιο "πυκνά": Δεν έχουν ομοιόμορφη κατανομή.



β) Από κοινού κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές.

• Διακριτή περίπτωση

Ορσ. Έστω ένας διακριτός $(\Omega, \mathbb{P})$ και διακριτό σύνολο $\mathcal{Z}$ (Z καλλιγραφικό). Γενικευμένη τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathcal{Z}$ λέγεται οποιαδήποτε συνάρτηση $Z : \Omega \to \mathcal{Z}$. Η σ.μ.π της Z ορίζεται ως: $p(z) = \mathbb{P}(Z=z) = \mathbb{P}\{\omega : Z(\omega) = z\}$

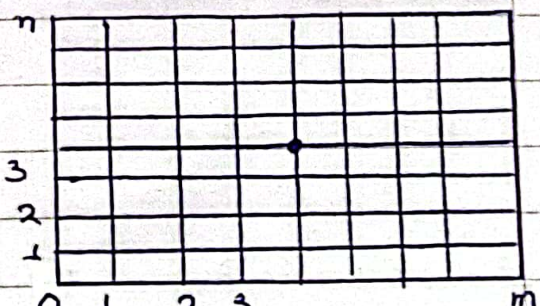
Εφαρμογή

Έστω διακριτές τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ (όχι γενικευμένες) τότε η $Z = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ είναι μια γενικευμένη τ.μ. με τιμές στον $\mathbb{R}^2$. Επειδή ο $\mathbb{R}^2$ είναι δισδιάστατος χώρος η Z σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται και (δισδιάστατη) διανυσματική τ. μεταβλητή. Η από κοινού σ.μ.π. των μεταβλητών X, Y ορίζεται ως η σμπ της τ.μ. $Z = (X, Y)$, δηλαδή:

$$p(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y) \underset{Z=(x,y)}{\overset{Z=(X,Y)}{\Longleftrightarrow}} p(z) = \mathbb{P}(Z=z)$$

Παράδειγμα

- X τ.μ. με τιμές $\{0,1,\dots,m\}$ ομοιόμορφα
- Y τμ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{0,1,\dots,n\}$
- Η από κοινού κατανομή των X, Y θα είναι:



$p(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)$ $\quad x \in \{0,1,\dots,m\}$

$\quad y \in \{0,1,\dots,n\}$

(1) ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν ξέρω τις επιμέρους κατανομές των X, Y (εδώ ομοιόμορφες) **δεν** γνωρίζουμε απαραίτητα την από κοινού κατανομή τους. 11/05

(2) ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν X, Y ομοιόμορφες $\not\Rightarrow$ $(X,Y)=Z$ θα είναι από κοινού ομοιόμορφη

Παράδειγμα:

Έστω $m=n$, $Y=X$, θα έχω:

- X ομοιόμορφη ✓
- Y ομοιόμορφη ($Y=X$) ✓
- Ωστόσο τα μόνα ζεύγη (x,y) που προκύπτουν με θετική πιθανότητα είναι αν $x=y$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=x, Y=y)=0$, αν $x\neq y$ (επειδή $X=Y$)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δεν πρέπει να υποθέτουμε "ανεξαρτησία"

→ Γενικώς, γνώση των επιμέρους κατανομών **δεν** συνεπάγεται ($\not\Rightarrow$) γνώση της από κοινού κατανομής.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: Από κοινού $\Rightarrow$ ~~επιμέρους~~ περιθώριες κατανομές

→ Συμπερασματικά, αν οι X, Y έχουν από κοινού σμπ. $p(x,y)=\mathbb{P}(X=x, Y=y)$, τότε:

$$\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X=x, Y=\text{οτιδήποτε})=\sum_{y\in \mathcal{Y}} p(x,y)$$

$$\mathbb{P}(Y=y)=\mathbb{P}(Y=y, x\in \mathcal{X})=\sum_{x\in \mathcal{X}} p(x,y)$$

Περιθώρια της X:	Περιθώρια της Y:
$p_X(x)=\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)$	$p_Y(y)=\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x,y)$

- Συνεχής περίπτωση:

Οι ορισμοί είναι αντίστοιχοι:

Αν X, Y συνεχείς τ.μ., η $Z=(X,Y)$ θα λέγεται από κοινού συνεχής τ.μ. με από κοινού σ.π.π. όταν υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x,y)$, τ.ω:

$$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B)=\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy$$

Leibniz: $\mathbb{P}(x\leq X\leq x+dx, y\leq Y\leq y+dy)=f(x,y)\,dx\,dy$

Παράδειγμα:

Ομοιόμορφη κατανομή στον κύκλο. Έστω ακτίνα $R>0$, έστω $Z=(X,Y)$ η θέση ενός τυχαίου σημείου επιλεγμένου με σ.π.π.

$$f(x)=\begin{cases} c, & x^2+y^2\le R^2 \quad (\text{μέσα στον κύκλο}) \\ 0, & x^2+y^2>R^2 \end{cases}$$

(1) Να βρείτε c

(2) Να βρείτε τις περιθώριες των X,Y

(3) Να υπολογιστεί η σππ της τ.μ. $D=\sqrt{X^2+Y^2}$

Λύση:

(1) Αφού f σππ της $Z=(X,Y)$ θα έχουμε:

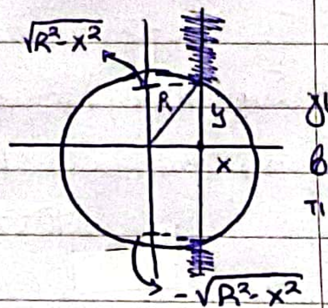
$$1=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\le R^2} c\,dx\,dy = c\iint_{x^2+y^2\le R^2} dx\,dy = c\cdot\pi\cdot R^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{\pi R^2}} \qquad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & x^2+y^2>R^2 \end{cases}$$

(2) Η περιθώρια της X θα είναι:

$$p_X(x)=\int_{\mathbb{R}} p(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} p(x,y)\,dy$$

$$p_X(x)=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\,dy = \frac{\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}$$



για να βρώ τις τιμές του y