Μάθημα 16 – 27.04.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Έφη Γαληροπούλου – Σωτηρία Χριστοδουλοπούλου

27/4/23

Εκθετική κατανομή

σ.π.π. : $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Ιδιοτητα μνήμης (ιδιοτητα έλλειψης μνήμης) (memoryless)

Συνήθως η εκθετική κατανομή μοντελοποιεί χρονο μεχρις οτου συμβεί ενα συμβάν

Μας ενδιαφερει συχνά η δεσμευμενη πιθανοτητα να μη συμβεί το συμβάν κάποια χρ. στιγμη $t+s$ δεδομενου οτι δεν εχει συμβεί μεχρι την χρονική στιγμη t

Ενδιαφερόμαστε για την πιθανοτητα (s/m)

$$\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t)$$

Θα λεμε οτι η X δεν εχει μνήμη ανν εξ'ορισμού

$$\boxed{\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)} \quad (ML)$$

① Θδο η εκθετική κατανομή ΔΕΝ εχει μνήμη

$$\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t+s \wedge X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

Άρα
$$\boxed{\begin{aligned} &(ML)\ \mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > t)\,\mathbb{P}(X > s) \end{aligned}}$$

Για την εκθετική κατανομή:

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

Αρα εχουμε $\mathbb{P}(X > t+s) = e^{-\lambda(t+s)} = e^{-\lambda t} e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > t)\,\mathbb{P}(X > s)$

② Αν η X ΔΕΝ έχει μνήμη, τότε $X \sim exp(\lambda)$

η εκθετική είναι η ΜΟΝΗ κατανομή με αυτή την ιδιότητα

Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι
$\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X>t)\,\mathbb{P}(X>s)$ (ML)

Αρκεί να προσδιορίσουμε την πιθανότητα $g(t) = \mathbb{P}(X>t)$
αυτό επειδή: $g(t) = 1 - F(t) \Rightarrow f(t) = \frac{d}{dt}(1 - g(t))$

Από (ML) έχουμε: $g(t+s) = g(t)\,g(s)$

(✱) Ξεκινάμε να βάζουμε τιμές, για να δούμε τι γίνεται:

- $\left.\begin{matrix} t=0 \\ s=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(0) = g(0)\,g(0) = g(0)^2 \Rightarrow \cancel{g(0)=0}$ ή $\boxed{g(0)=1}$

Εφόσον μιλάμε για πιθανότητες έχουμε $\mathbb{P}(X>0)>0$ άρα η λύση $g(0)=0$ απορρίπτεται.
Επομένως έχουμε μόνο την λύση $g(0)=1$

- $\left.\begin{matrix} t=1 \\ s=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(2) = g(1)\,g(1) = [g(1)]^2$

Επαγωγικά
- $g(n+1) = g(n)\,g(1) = g(1)^n\,g(1) = [g(1)]^{n+1}$

Συνολικά: $g(n) = [g(1)]^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$= e^{n \log g(1)} \xlongequal{a = \log g(1)} e^{an}$

Για τους ρητούς:
- Αν $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$ τότε $g(np) = g(n\frac{m}{n}) = g(m) = \boxed{[g(1)]^m}$

$g(np) = g(\overbrace{p+\dots+p}^{n}) = \overbrace{g(p)\cdots g(p)}^{n\text{-φορές}} = \boxed{[g(p)]^n}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{g(p) = [g(1)]^{m/n} = [g(1)]^p} \quad \forall p \in \mathbb{Q}_+$$

Για τους πραγματικούς:

- Ωστόσο, αφού g συνεχής (ως συμπληρωματική κατανομή πιθανότητας) και το $\mathbb{Q}_+$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$ έπεται ότι $\boxed{g(t) = [g(1)]^t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+}$

Αν p_n ακολουθία ρητών ώστε $p_n \to t$ καθώς $n \to \infty$ θα έχουμε

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} g(p_n) = \lim_{n\to\infty} [g(1)]^{p_n} = [g(1)]^t$$

από την συνέχεια της g

Ασκήσεις / παραδείγματα

1) (Ross 1β) Ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα ακολουθεί εκθετική κατανομή της μορφής $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ (x σε βδομάδες)

α) Ποια η πιθανότητα ο λαμπτήρας να καεί ανάμεσα σε 50 και 150 εβδομάδες;

β) Ποια η πιθανότητα να ζήσει λιγότερο από 100 εβδομάδες;

θα μπορούσα να μην βάλω "=" σε αυτή την περίπτωση γιατί είναι συνεχής όχι διακριτή

α) $P_1 = \mathbb{P}(50 \leq X \leq 150) = \int_{50}^{150} f(x)\,dx$ (*) (χρειαζόμαστε την τιμή του λ)

- Αφού έχουμε εκθετική κατανομή $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$

$$\lambda \int_0^\infty e^{-x/100}\,dx = \lambda(-100)\, e^{-x/100}\Big|_0^\infty = 100\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

(*) $$\frac{1}{100}\int_{50}^{150} e^{-x/100}\,dx = \frac{1}{100}(-100)\, e^{-x/100}\Big|_{50}^{150}$$

$$= e^{-50/100} - e^{-150/100} = e^{-1/2} - e^{-3/2} = \ldots$$

Εναλλακτικά: $P_1 = \mathbb{P}(50 \leq X \leq 150) = \mathbb{P}(X \leq 150) - \mathbb{P}(X \leq 50) = F(150) - F(50) =$

$= 1 - e^{-150/100} - (1 - e^{-50/100})$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

β) $P_2 = \mathbb{P}(X \leq 100) = F(100) = 1 - e^{-100/100} = 1 - 1/e \simeq 0.63$

2] (Ross 1γ) Ο χρονος ζωης ενος transistor ακολουθει τη σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 100 \\ a/x^2, & x > 100 \end{cases}$

Ποια η πιθανοτητα 2 απο τα 5 transistor να εχουν παρουσιασει βλαβη με σε 150 ωρες?

Λύση:

1ο Βημα: προσδιοριζουμε το a

πρεπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \iff 1 = \int_{100}^{\infty} \frac{a}{x^2}\,dx = a\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{100}^{\infty} \iff$

$\iff 1 = \frac{a}{100} \Rightarrow a = 100$

2ο Βημα: απλοποιουμε την ερωτηση:

ποια η πιθανοτητα να παρουσιασει βλαβη 1 transistor τις πρωτες 150 ωρες;

$$p = \int_{0}^{150} f(x)\,dx = \int_{100}^{150} f(x)\,dx = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\,dx = 100\int_{100}^{150} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 100\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{100}^{150} = 100\left[\frac{1}{100} - \frac{1}{150}\right] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

3ο Βημα: Η πιθανοτητα να προκύψει 1 transistor ελαττωματικο τις πρωτες 150 ωρες ειναι $p = 1/3$

Αρα η πιθανοτητα 2 απο τα 5 να προκύψουν ελαττωματικα ειναι διωνυμικη και ιση με $\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2} \, \frac{2^3}{3^5} = \frac{5 \cdot 2^4}{3^5} = \frac{80}{243}$$

Στατιστικά Συνεχών μεταβλητών

Αν X διακριτή τ.μ. με σ.μ.π. (μάζας) $p(x)$ η μέση τιμή της X δίνεται από την σχέση $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X} x p(x)$

Αν X συνεχής τ.μ με σ.π.π. (πυκνότητας) $f(x)$ η μέση τιμή της X δίνεται από την σχέση $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \underbrace{f(x)dx}_{\mathbb{P}(x \leq X \leq x+dx)}$

Βασικές ιδιότητες:

X Ομοφωνία : δεν έχει νόημα στα πλαίσια συνεχών τ.μ.
↳ αν $\mathbb{P}(X=a)=1$ τότε $\mathbb{E}[X]=a$ → σε αυτό αφορά σημεία στις διακριτές

✓ Γραμμικότητα : $\mathbb{E}[aX+\beta Y] = a\mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$

✓ Μονοτονία: αν $X \leq Y$ τότε $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$

✓ Lotus : αν g ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε
τότε $\boxed{\mathbb{E}[g(x)] = \int g(x) f(x) dx}$

Lotus (απόδειξη) (Έστω ολ/μη $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. τότε $\mathbb{E}[g(x)] = \int g(x) f_X(x) dx$)

απλή περίπτωση: g παρ/μη και $g'(x) > 0 \ \forall x$.
Έστω $Y = g(X)$ και έστω q η σ.π.π. της Y δηλαδή

$$\mathbb{P}(y \leq Y \leq y+dy) = q(y)dy$$

$$\mathbb{P}(y \leq Y \leq y+dy) = \mathbb{P}(y \leq g(x) \leq y+dy)$$

$$= \mathbb{P}(g^{-1}(y) \leq X \leq g^{-1}(y+dy)) \rightarrow \text{Taylor}$$

$$= \mathbb{P}(g^{-1}(y) \leq X \leq g^{-1}(y) + [g^{-1}(y)]' dy + \cancel{O(dy^2)})$$

$$= \mathbb{P}\left(g^{-1}(y) \leq X \leq g^{-1}(y) + \circledast \frac{1}{g'[g^{-1}(y)]} dy\right) = \boxed{\frac{f(g^{-1}(y))}{g'[g^{-1}(y)]}} dy = q(y) dy$$

$\circledast$
$g[g^{-1}(y)] = y$
$\Rightarrow (g[g^{-1}(y)])' = 1$
$g'(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = 1$
$(g^{-1}(y))' = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))}$

$$\Rightarrow \text{σ.π.π.} : \boxed{q(y) = \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \int y\, q(y)\, dy = \int y \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}\, dy =$$

$$\frac{x = g^{-1}(y)}{\substack{y = g(x) \\ dy = g'(x)dx}} \quad \int g(x) \frac{f(x)}{\cancel{g'(x)}} \cancel{g'(x)}\, dx = \int g(x) f(x)\, dx$$

"Η απόδειξη θα βασίζεται σε ένα διαφορετικό τρόπο άθροισης πιθανοτήτων"

Λήμμα: Έστω συνεχής τ.μ. $\underline{Y \geq 0}$. Τότε

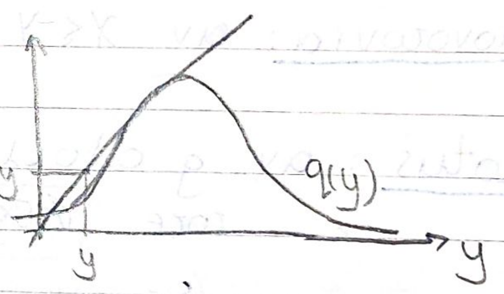
$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geq y)\, dy \\ &= \int_0^\infty [1 - F_Y(y)]\, dy\end{aligned}}$$

απόδειξη:

<u>Σκέψεις</u>: $\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty y \underbrace{q(y)}_{\text{σππ της } Y} dy$

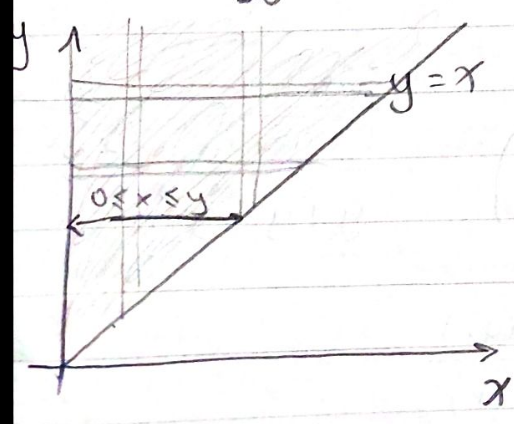
$q(y) = F'(y)$
$$= \int_0^\infty y F'(y)\, dy$$
$$= yF(y)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty y' F(y)\, dy$$
$$= yF(y)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty F(y)\, dy$$

αυτό θα ήθελα να μπορώ να κάνω



$$F(y) = \int_0^y q(x)\, dx$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty y\, q(y)\, dy = \int_0^\infty \int_0^y q(y)\, dx\, dy$$



$$= \int_0^\infty \int_x^\infty q(y)\, dy\, dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geq x)\, dx$$
$$= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geq y)\, dy$$