Μάθημα 12 – 30.03.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Ελευθερία Παππά

30/3/23

Ανακεφαλαίωση: Κατανομές

Poisson: $p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Διωνυμική: $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Γεωμετρική: $p(k) = p(1-p)^{k-1}$

Αρνητική Διωνυμική: $p(k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k$

Ορισμός: Έστω διακριτή τυχαία μεταβλητή X πάνω σε ένα χ.π. $(\mathbb{R}, \Omega)$. Η μέση τιμή της X ορίζεται ως
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p(x_k)$$
όπου $x_1, x_2, \dots$ οι διακριτές τιμές της X.

Ιδιότητες:
- Γραμμικότητα: $\mathbb{E}[aX+bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$, όπου X, Y τ.μ., $a, b \in \mathbb{R}$
- Ομοφωνία: $\mathbb{E}[A] = a$ όταν $P(A=a)=1$
- Μονοτονία: $X \leq Y \xRightarrow{*X(\omega)\leq Y(\omega)\ \forall \omega \in \Omega} \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
- LOTUS: Αν $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τότε $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k)\cdot g(x_k)$

↳ LAW OF THE UNCONSCIOUS STATISTICIAN

Χαρακτηριστικές ιδιότητες επειδή συνεπάγονται τον ορισμό.

Σημείωση: Αν $g(x) = X$, παίρνουμε τον ορισμό της μέσης τιμής!

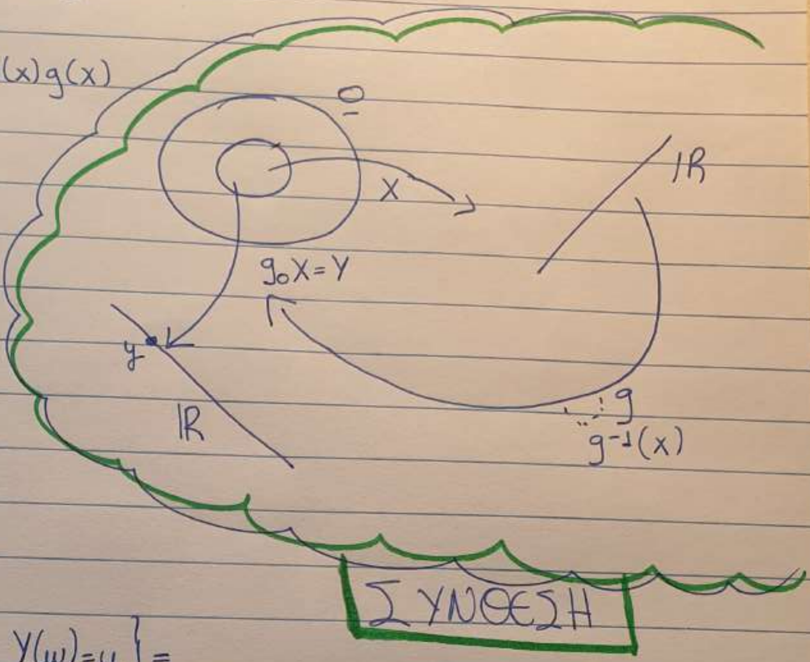
Αποδείξεις: Ομοφωνία: Έχουμε μία τυχαία μεταβλητή $A: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.ω. $P(A=a)=1$ οπότε η αντίστοιχη σ.μ.π. είναι $p(a)=1$ $p(x)=0\ \forall x \neq a$

(Μόνο 1 τιμή)

Άρα, εξ ορισμού: $\mathbb{E}[A] = \sum_{k=1}^{1} x_k\, p(x_k) = a\,p(a) = a$

LOTUS: Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $\mathcal{X} \equiv X(\Omega) = \{x_i,\ i = 1, 2, \dots\}$

Θέλω ν.δ.ο. $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) g(x)$



Εξ ορισμού, αν $Y = g \circ X$ θα είχαμε

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y\, q(y) \quad \text{όπου}$$

$$\begin{cases} \mathcal{Y} = Y(\Omega) \\ q(y) \text{ η σ.μ.π. της } Y \end{cases}$$

· Σ.μ.π. $q(y) = P(Y = y) = P\{\omega : Y(\omega) = y\} =$

$$= P\{\omega : g(X(\omega)) = y\} = P\{\omega : X(\omega) \in g^{-1}(y)\} = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ g(x) = y}} p(x)$$

· Άρα: $$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ g(x) = y}} p(x) = \overbrace{\sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ g(x) = y}}}^{\text{όλα τα ενδεχόμενα του } \Omega \,\equiv\, \text{όλες οι τιμές της } X} g(x) \cdot p(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \cdot g(x).$$

Παράδειγμα: Ρίχνουμε n ζάρια (αμερόληπτα)(ανεξάρτητα) και καλούμε X_n το άθροισμά τους. Να βρεθεί η $\mathbb{E}[X_n]$ για $n = 1, 2, 3, \dots$ γενικό n

· Για $n = 1$: $$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{k \in \{1,2,\dots 6\}} \underbrace{k}_{\substack{\text{τιμή του ζαριού} \\ \text{(πιθανό αποτέλεσμα ρίψης)}}} \frac{1}{6} \leftarrow \text{πιθανότητα} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

· Για $n=2$: $\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[Z_1+Z_2] = \overbrace{\mathbb{E}[Z_1]}^{=3.5\,(n=1)} + \overbrace{\mathbb{E}[Z_2]}^{=3.5\,(n=1)} = 7$

από ιδιότητες μέσης τιμής

$X_2 = \underset{\text{αποτέλεσμα 1ου ζαριού}}{Z_1} + \underset{\text{2ου ζαριού}}{Z_2}$

Εναλλακτικά: Θα υπολογίσουμε

① Τις δυνατές τιμές της X_2: $k \in \{2, \dots, 12\}$

② Την πιθανότητα κάθε τιμής:

$Z_2 \backslash Z_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Τιμή X_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πιθανότητα $p(k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathbb{E}[X_2] = \sum_{k \in \{2,\dots,12\}} k\,p(k) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + \dots + 12 \cdot 1}{36} = 7$$

· Για $n=3$: Ο ευθύς υπολογισμός της κατανομής της X_3 είναι δύσκολος.
Ωστόσο, έχουμε αποδείξει ότι:

$$\mathbb{E}[X_3] = \mathbb{E}[Z_1 + Z_2 + \underset{\text{αποτ. 3ου ζαριού}}{Z_3}] = \mathbb{E}[Z_1] + \mathbb{E}[Z_2] + \mathbb{E}[Z_3] = 3{,}5 + 3{,}5 + 3{,}5 = 10{,}5$$

Για γενικό $n \Longrightarrow \mathbb{E}[X_n] = 3{,}5n$

Poisson με παράμετρο λ

__Εφαρμογή 1__: Έστω τμ. X που ακολουθεί κατανομή $Pois(\lambda)$

$p(t) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Να υπολογισθεί η μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$\underset{\begin{array}{c|c|c} k & 1 & \infty \\ \ell & 0 & \infty \end{array}}{\overset{\ell = k-1}{=\!=\!=}} \lambda e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda \cdot \cancel{e^{-\lambda}} \cancel{e^{\lambda}} = \lambda$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \lambda}$$

Πιθανότητες 1   30/03/2023

Μάθημα 12 – 30.03.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Ειρήνη Θεοδώρου

Έχουμε δει τις εξής κατανομές:

1) Poisson : $p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

2) Διωνυμική : $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, n ανεξάρτητες δοκιμές με πιθανότητα επιτυχίας p.

3) Γεωμετρική : $p(k) = p(1-p)^{k-1}$

4) Αρνητική Διωνυμική : $p(k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k$

Ορισμός: Έστω διακριτή τυχαία μεταβλητή X πάνω σε έναν ~~διακριτό~~ χώρο πιθανότητας $(\mathbb{P}, \Omega)$. Η μέση τιμή της X ορίζεται ως $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$ όπου $x_1, x_2, \dots$ οι διακριτές τιμές της X.

Ιδιότητες Μέσης Τιμής

1) Γραμμικότητα: $E[aX+bY] = aE[X] + bE[Y]$, όπου X, Y τμ και $a, b \in \mathbb{R}$.

2) Ομοιομορφία: $E[A] = a$ όταν $P(A=a) = 1$

3) Μονοτονία: $X \le Y$ δηλ. $X(\omega) \le Y(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega \Rightarrow E[X] \le E[Y]$

4) LOTUS (Law of the unconsious statistician): Αν $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τότε
$E[g(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) g(x_k)$.

Προφανώς αν $g(x) = x$, παίρνουμε τον ορισμό της μέσης τιμής.

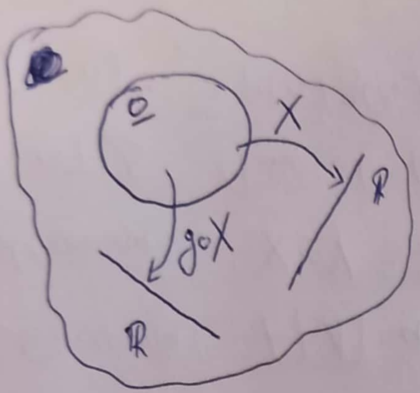
Απόδειξη: 1) Θέτουμε $Z = aX+bY$. Τότε $E[Z] = \sum_{s\in\Omega} Z(s)p(s) = \sum_{s\in\Omega}(aX(s) + bY(s))p(s) =$
$a\sum_{s\in\Omega} X(s)p(s) + b\sum_{s\in\Omega} Y(s)p(s) = aE[X] + bE[Y]$

2) Έχουμε μια τυχαία μεταβλητή $A: \Omega \to \mathbb{R}$ τω $P(A=a) = 1$. Άρα η αντίστοιχη σ.μ.π είναι $p(a) = 1$ και $p(x) = 0$ $\forall x \ne a$. Άρα $E[A] = a \cdot p(a) = a \cdot 1 = a$.

3) Έστω τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $X(\omega) \le Y(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$. Τότε,

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) \le \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) p(\omega) = E[Y].$$

4) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. με σύνολο τιμών $X(\Omega) = \{x_i, i = 1, 2, \dots\}$.
Εξ' ορισμού αν $\cancel{E[Y] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y q(y)}$ $Y = g \circ X$, τότε έχουμε $E[Y] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y q(y)$, όπου $\mathcal{Y} = Y(\Omega)$ και $q(y)$ η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Y.



Έχουμε ότι $q(y) = P(Y = y) = P(\omega : Y(\omega) = y) =$
$P\{\omega : g(X(\omega)) = y\} = P\{\omega : X(\omega) \in g^{-1}(y)\} =$
$\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} p(x)$

Συνεπώς $E[Y] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} p(x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} g(x) \cdot p(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} p(x) g(x)$

<u>Παράδειγμα</u>: Ρίχνουμε n ζάρια (αμερόληπτα, ανεξάρτητα) και καλούμε X_n το άθροισμά τους. Να βρεθεί η $E[X_n]$ για $n = 1, 2, 3, \dots$

• Για $n = 1$, $E[X_1] = \sum_{k \in \{1, .., 6\}} k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

• Για $n = 2$, $X_2 = Z_1 + Z_2$, όπου Z_i = η ένδειξη του ζαριού i. Από ιδιότητες μέσης τιμής έχουμε ότι $E[X_2] = E[Z_1] + E[Z_2] = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$.

Εναλλακτικά θα υπολογίσουμε τις δυνατές τιμές της X_2 και την πιθανότητα κάθε τιμής.

Z_2 \ Z_1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Τιμή	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πιθ.	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Άρα $E[X_2] = \sum_{k=2}^{12} k\,p(k) =$

$$\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 7+7\cdot 6+8\cdot 5+9\cdot 4+10\cdot 3+11\cdot 2+12\cdot 1}{36}$$

$= 7$

• Για $n=3$, ο ευθύς υπολογισμός της κατανομής της X_3 είναι δύσκολος. Ωστόσο έχουμε απευθείας $E[X_3]=E[Z_1]+E[Z_2]+E[Z_3]=3{,}5+3{,}5+3{,}5=10{,}5$ όπου Z_i = αποτέλεσμα ζαριού i, για $i=1,2,3$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για τυχαίο $n\in\mathbb{N}$, $E[X_n]=3{,}5\cdot n$

Εφαρμογές

1) Έστω τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κατανομή Poisson(λ), δηλαδή $p(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Τότε $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda$.

2) Έστω τυχαία μεταβλητή $X\sim Bin(n,p)$, δηλαδή $p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Τότε $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{k\cdot n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k} =$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot p^k(1-p)^{n-k}}{(k-1)!} =$

$np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)\,p^{k-1}(1-p)^{n-k}}{(k-1)!} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} = np(p+1-p)^{n-1} = np.$