Μάθημα 11 – 28.03.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Μιράντα Λουμιώτη
Δημήτρης Μανωλούδης

28.03.2023.

→ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ.

- διακριτές τυχαίες μεταβλητές
- ορισμός
- ορισμός δ.χ.
- συνάρτηση μάζας πιθ. $p(x) = \mathbb{P}(X=x)$
- αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$
- poisson
- διωνυμική

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ [ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ.]

Έστω n (ανεξάρτητες) δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p \to$ "1" (επιτυχία), και πιθανότητα αποτυχίας $q = 1-p \to$ "0" (αποτυχία).

(β) X = αριθμός επιτυχιών σε n δοκιμές

$= \sum_{i=1}^{n} x_i$

↳ $x_i \in \{0,1\}$ αποτέλεσμα της i δοκιμής.

Ο χώρος του πειράματος n δοκιμών είναι:

$$\Omega = \{0,1\}^n$$

$$= 2^n \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Δοκ.1.} & & \text{Δοκ.n-1} & \text{Δοκ.n.} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right.$$

Θέλουμε να βρούμε τη σ.μ.π.

$p(k) = \mathbb{P}(X=k)$

$= \mathbb{P}(k$ επιτυχίες σε n δοκιμές$)$.

$\mathbb{P}$(συγκεκριμένη ακολουθία με k "1") πόσες ακολουθίες έχω με k "1"

(a) (b)

Για το (a) έχουμε k "1", n-k "0" κ'αυτό συμβαίνει σε οποιαδήποτε δεδομένη διάταξη "0", "1" με πιθανότητα $p^k(1-p)^{n-k}$.
Για το (b) έχουμε $\binom{n}{k}$ ακολουθίες με k "1".
Συνολικά: $p(k) = (a)\cdot(b)$ → p^k σαν παράμετρος (πραγματικός αριθμός)
$p(k)$ σαν συνάρτηση $= \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)$

Παράδειγμα:
Ο χώρος του πειράματος 3 δοκιμών είναι $\Omega = \{0,1\}^3$. Ποια η $\mathbb{P}$(2 επιτυχίες σε 3 δοκιμές);

$$\Omega = \begin{cases} 0 \; 0 \; 0 & (1-p)^3 \\ 0 \; 0 \; 1 & (1-p)(1-p)\times p = (1-p)^2\cdot p \\ 0 \; 1 \; 0 & (1-p)(p)(1-p) = (1-p)^2\cdot p \\ \boxed{0 \; 1 \; 1} & (1-p)(p)(p) = (1-p)\cdot p^2 \\ 1 \; 0 \; 0 & (p)(1-p)(1-p) = p\cdot(1-p)^2 \\ \boxed{1 \; 0 \; 1} & (p)(1-p)(p) = p^2\cdot(1-p)^2 \\ \boxed{1 \; 1 \; 0} & (p)(p)(1-p) = p^2\cdot(1-p) \\ 1 \; 1 \; 1 & (p)\cdot(p)\cdot(p) = p^3 \end{cases}$$

εκφράζουν το (a) → $\mathbb{P}$(συγκεκριμένη ακολουθία με $k=2$ "1")
(β) εδώ 3 ακολουθίες με $k=2$ "1".

→ **ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ**

$$\boxed{p(k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: διωνυμικό ανάπτυγμα
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$

(1) Έλεγχος ότι είναι πράγματι σ.μ.π.
Θ.δ.ο. $\sum_{k=0}^{n} p(k) = 1$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{p^k}_{a}\cdot\underbrace{(1-p)^{n-k}}_{b}$$ → διωνυμικό ανάπτυγμα

$$= (p+1-p)^n = 1^n$$ όπου $1^n = 1$ οπότε ελέγξαμε.

(2) Ασυμπτωτική συμπεριφορά της $p(k)$ όταν $n\to\infty$, $p\to 0$, $np=\lambda$.
[Προσέγγιση της πιθανότητας να μετρήσουμε k τυπογραφικά λάθη κλπ.]
Μας ενδιαφέρει το όριο $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}} p(k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

Έχουμε: $p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{σταθερό ως προς } n \text{ καθώς } n\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\frac{n}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

↳ πάει στο 1 καθώς $n\to\infty$
↳ πάει στο $e^{-\lambda}$ καθώς $n\to\infty$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1}$$

Συνολικά $\lim_{\substack{n\to\infty \\ p=\frac{\lambda}{n}}} p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ → poisson

→ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Ποιος ο αριθμός δοκιμών Bernoulli με πιθ. επιτυχίας p που απαιτούνται για να έχουμε ένα "1";

[Επ.χ. η κατανομή του αριθμού ρίψεων ενός νομίσματος έως ότου φέρω "Κ".]

Τα πιθανά αποτελέσματα των δοκιμών έχουν ως εξής:

← επιτυχία με την k δοκιμή

k	p(k)	
1	p	$\lvert 1 \rvert \leftarrow p$
2	$(1-p)\cdot p$	$\lvert \overset{1-p}{0} \lvert \overset{p}{1} \rvert$
3	$(1-p)^2\cdot p$	$\lvert \overset{1-p}{0} \lvert \overset{1-p}{0} \lvert \overset{p}{1} \rvert$
⋮	⋮	⋮
k	$(1-p)^{k-1}\cdot p$	$\underbrace{\lvert \overset{1-p}{0} \lvert \overset{1-p}{0} \lvert \cdots \lvert \overset{1-p}{0} \lvert}_{k-1} \overset{p}{1} \rvert$ ↑ επιτυχία

⊛ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΟΥ ΞΕΡΩ.

Poisson: $p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Διωνυμική: $p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Γεωμετρική: $p(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

Προσθήκη: Αρνητική Διωνυμική

$p(k) = \binom{k+r-1}{r-1} \cdot p^r (1-p)^k$

Παραλλαγή Προβλήματος.

→ ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθ. επιτυχίας p

→ Το πείραμα σταματάει όταν έχουμε r^κ (δοσμένο) επιτυχίες

→ ποια η κατανομή του αριθμού αποτυχιών μέχρις ότου σταματήσει το πείραμα;

Ξεκινάμε για διαίσθηση με αν περίπτωση $r=2$.

Πιθανά ενδεχόμενα: $\overset{p}{|1|}\overset{p}{1|}$ $k=0$, $p(k)=p^2$: μήκος 2.

• μήκος 3: $|0|0|1|$ × (έχω μήκος 3, αλλά 1 επιτυχία)

$|0|1|1|$ ✓ (έχω μήκος 3, και 2 επιτυχίες)

$|1|0|1|$ ✓ (έχω μήκος 3, και 2 επιτυχίες)

$|1|1|1|$ × (έχω μήκος 3, αλλά 3 επιτυχίες)

(δεσμεύω την τελευταία θέση και πρέπει να επιλέξω σ' αυτήν 1 για την επιτυχία, με πόσους τρόπους; $\binom{2}{1}$.

• μήκος 4: $|\;|\;|\;|1|$ ο #πιθανών ακολουθιών μήκους 4 θα δίνεται από τον αριθμό $\binom{3}{1}$, που μετράει τις πιθανές θέσεις 1 επιτυχίας σε 1 τριάδα θέσεων.

2 επιτυχίες: $p \times p$

2 αποτυχίες: $(1-p)(1-p)$

$p^2 \cdot (1-p)^2$

→ Γενικά, έστω ℓ το μήκος της ακολουθίας που παράγεται εώς ότου έχουμε r επιτυχίες.

$$\underbrace{|\;|\;|\;\cdots\;|1|}_{\ell \text{ κουτάκια}} \rightarrow \text{Τερματισμός}$$

Θα πρέπει να μετρήσουμε τον αριθμό τρόπων με τους οποίους μπορούμε να κατανείμουμε $r-1$ "1" σε $\ell-1$ θέσεις ⇒

$$\Rightarrow \binom{\ell-1}{r-1}$$

Κάθε μία από αυτές τις ακολουθίες αποτελείται από r "1" ⇒

$\Rightarrow \underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{r} = p^r$ και από $\ell-r$ "0" $\Rightarrow \underbrace{(1-p)(1-p)\times \cdots \times(1-p)}_{\ell-r} = (1-p)^{\ell-r}$

Πολλαπλασιάζοντας έχουμε: $\mathbb{P}(r$ επιτυχίες σε ακριβώς ℓ δοκιμές$) =$

$$= \binom{\ell-1}{r-1} \cdot p^r (1-p)^{\ell-r}$$

Άρα, ο αριθμός αποτυχιών σε ένα πείραμα μήκους l, όπου υπήρξαν r επιτυχίες είναι $k=l-r$.

$\mathbb{P}$ (k αποτυχίες σταματώντας μετά από r επιτυχίες)

$\boxed{p(k)=\binom{k+r-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^k}$ ← ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ

[Η γεωμετρική είναι εξειδικευμένη περίπτωση με $r=1$ της αρνητικής διωνυμικής. Με αντικατάσταση δεν παίρνω ακριβώς τον τύπο της γεωμετρικής (παίρνω $(1-p)^k$ και όχι $(1-p)^{k-1}$)]

*ΠΡΟΣΟΧΗ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ → k = #δοκιμών

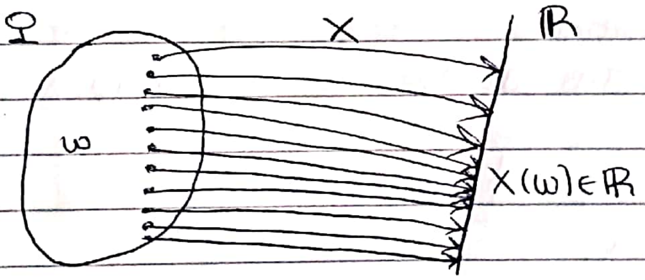
ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ → k = #αποτυχιών.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Δοθείσας μίας κατανομής θα κατασκευάσουμε κάποιες συγκεκριμένες ποσότητες που "περιγράφουν" την κατανομή:

Μέση/Αναμενόμενη Τιμή

Διακύμανση/Τυπική Απόκλιση



ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ

Ο μέσος όρος εκφράζει πού περίπου κινούνται οι τιμές μίας τ.μ. X με σ.μ.π. $p(x)$

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

Η διακύμανση εκφράζει πόσο απλωμένες είναι οι τιμές της τ.μ. γύρω από τη μέση τιμή της.

Παράδειγμα (μη τυχαίο - μέσου όρου):

Βαθμοί σε 8 πρώτα εξάμηνα: 7 8 6 8 7 5 6 10

Μέσος όρος $= \frac{7+8+6+8+7+5+6+10}{8} = \frac{1\cdot5+2\cdot6+2\cdot7+2\cdot8+0\cdot9+1\cdot10}{8} =$

μέσω παίρνω τη σούμα

$$= \frac{1}{8}\cdot 5 + \frac{2}{8}\cdot 6 + \frac{2}{8}\cdot 7 + \frac{2}{8}\cdot 8 + \frac{0}{8}\cdot 9 + \frac{1}{8}\cdot 10.$$

↳ η συχνότητα του 5 είναι 1 στο 8. ↳ η συχνότητα του 8 είναι 2 στο 8.

⇒ Παίρνω τον αριθμό κ' τον πολλ/ζω με τη συχνότητά του

$$= \sum_{\substack{\text{πιθανά} \\ \text{αποτελέσματα}}} \text{βαθμός} \times \text{συχνότητα βαθμού}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥΣ Χ.Π.: Έστω τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $(\Omega, \mathbb{P})$ πεπερασμένος χώρος πιθανότητας. Η μέση / αναμενόμενη τιμή της X ορίζεται να είναι:

$$\boxed{\mu_X \equiv \mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \cdot X(\omega)}$$

→ αν όλα ισοπίθανα, $\mathbb{E}[X] = \frac{X(\omega_1) + \dots + X(\omega_n)}{n}$, όπου $n = |\Omega|$

→ Έστω ότι η X παίρνει τις τιμές $x_1, \dots, x_m$ (μόνο πεπερασμένες) με πιθ. και γνωρίζουμε τη σ.μ.π. $p(X = x_k) = p_k$.

Τότε, εξ' ορισμού έχουμε:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$= \mathbb{P}(\omega_1) \boxed{X(\omega_1)} + \mathbb{P}(\omega_2) \boxed{X(\omega_2)} + \dots + \mathbb{P}(\omega_n) \boxed{X(\omega_n)}$$

ανήκουν στο σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$.

$$= \sum_{k=1}^{m} \cdot \sum_{\omega : X(\omega) = x_k} x_k \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^{m} \cdot x_k \cdot \sum_{\omega : X(\omega) = x_k} \mathbb{P}(\omega)$$ ⊛ συνέχεια.

Όμως, $\sum_{\omega : X(\omega) = x_k} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) = x_k\}$

$$= \mathbb{P}(X = x_k)$$

$$= p_k$$

συνέχεια ⊛ Συνολικά, $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot p_k$

$$= \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot \underbrace{p(x_k)}_{\text{σ.μ.π.}}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ: Έστω τ.μ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ όπου $(\Omega, \mathbb{P})$ διακριτός χ.π. Έστω $\mathcal{X}$ το σύνολο τιμών της X $[\mathcal{X} = X(\Omega)]$. Η μέση τιμή (αναμενόμενη) της X ορίζεται ως

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot \underbrace{p(x)}_{\text{σ.μ.π. της } X}}$$, με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως.