20-3-23

Μάθημα 9 – 20.03.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Κατερίνα Κυρίτση
Άκης Μετινίδης

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

→ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘ/ΤΑ
→ Θ. BAYES
→ Θ.Ο.Π / Πολ/κό ΝΟΜΟ
→ "Τύπος του Bayes μέσω παραδείγματος"
→ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

{Για τους ορισμούς: Έστω δ. χώρος Ω με μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$}.

ΟΡΣ Δοθέντων δύο ενδεχομένων A, B, $P(B) > 0$, ορίζουμε την επίδραση πιθανότητας του B στο A ως

$$\boxed{\Delta P(A|B) = \mathbb{P}(A|B) - \mathbb{P}(A)}$$

$$\Delta P(A|B) \begin{cases} >0 & \text{θετική επίδραση} \\ =0 & \text{μηδενική} \longrightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ <0 & \text{αρνητική} \end{cases}$$

ΟΡΣ Δοθέντων δύο ενδεχομένων $A, B \subseteq \Omega$ θα λέμε ότι είναι στοχαστικά ανεξάρτητα αν εξ ορισμού

$$\boxed{\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$$

Σε αυτή την περίπτωση, θα γράφουμε $A \perp\!\!\!\perp B$

Παράδειγμα

Κάνουμε 2 ισοπίθανες ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος και ορίζουμε τα εξής ενδεχόμενα:

$A = \{ 1^{η} \text{ ρίψη } K \}$

$B = \{ 2^{η} \text{ ρίψη } K \}$

$C = \{ \text{ακριβώς μία ρίψη } K \}$

$D = \{ \text{ίδιο αποτέλεσμα στις 2 ρίψεις} \}$

Ποια ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα;

Λύση

Ο δ.χ. του πειράματος είναι $\Omega = \{ \underbrace{KK}_{1/4}, \underbrace{K\Gamma}_{1/4}, \underbrace{\Gamma K}_{1/4}, \underbrace{\Gamma\Gamma}_{1/4} \}$

$A = \{KK, K\Gamma\}$

$B = \{KK, \Gamma K\}$

$C = \{K\Gamma, \Gamma K\}$

$D = \{KK, \Gamma\Gamma\}$

$AB = \{KK\}$

$AC = \{K\Gamma\}$

$AD = \{KK\}$

$BC = \{\Gamma K\}$

$BD = \{KK\}$

$CD = \emptyset$

	$\mathbb{P}(1^{ου})$	$\mathbb{P}(2^{ου})$	$\mathbb{P}$(τομής)	
$\to AB$:	$\mathbb{P}(A) = 1/2$	$\mathbb{P}(B) = 1/2$	$\mathbb{P}(AB) = 1/4$	✓
$\to AC$:	$\mathbb{P}(A) = 1/2$	$\mathbb{P}(C) = 1/2$	$\mathbb{P}(AC) = 1/4$	✓
$\to AD$:	$\mathbb{P}(A) = 1/2$	$\mathbb{P}(D) = 1/2$	$\mathbb{P}(AD) = 1/4$	✓
$\to BC$:	$\mathbb{P}(B) = 1/2$	$\mathbb{P}(C) = 1/2$	$\mathbb{P}(BC) = 1/4$	✓
$\to BD$:	$\mathbb{P}(B) = 1/2$	$\mathbb{P}(D) = 1/2$	$\mathbb{P}(BD) = 1/4$	✓
$\to CD$:	$\mathbb{P}(C) = 1/2$	$\mathbb{P}(D) = 1/2$	$\mathbb{P}(CD) = 0$	✗

Βασικές Ιδιότητες

Έστω ενδεχόμενα A, B ενός χώρου πιθ. $(\Omega, \mathbb{P})$

- $A \perp\!\!\!\perp A \iff \mathbb{P}(A) = 0$ ή $\mathbb{P}(A) = 1$

- $A \perp\!\!\!\perp B \iff B \perp\!\!\!\perp A$

- $A \perp\!\!\!\perp B \iff A \perp\!\!\!\perp B^c$

- $AB = \emptyset,\ 0 < \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) < 1 \Rightarrow A \not\!\perp\!\!\!\perp B \iff$

[Ασυμβίβαστα $\Rightarrow$ Εξαρτημένα]

$\iff A \perp\!\!\!\perp B\ \ 0 < \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) < 1 \Rightarrow AB \neq \emptyset$

[Ανεξάρτητα $\Rightarrow$ Συμβιβάσιμα]

Αποδείξεις

- Έλλειψη αυτοπάθειας: $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \overset{\text{αν } A \perp\!\!\!\perp A}{=\!=}$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2 \iff \mathbb{P}(A)^2 = \mathbb{P}(A) \iff$$
$$\iff \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$$

· Συμμετρία: $\left.\begin{array}{c}\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\ \parallel \\ \mathbb{P}(BA)\end{array}\right\}$ Συμμετρία του ορισμού

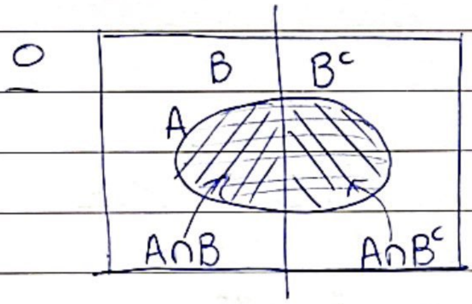
· Ανεξαρτησία συμπληρωματικών ενδεχομένων:

Αφού $(B^c)^c = B$, αρκεί νδο την κατεύθυνση "$\Rightarrow$"

Έστω $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \perp\!\!\!\perp B^c$,

δηλαδή $\mathbb{P}(AB^c) = \mathbb{P}(A)\underbrace{\left[1 - \mathbb{P}(B)\right]}_{\mathbb{P}(B^c)}$



Ωστόσο, $A = \underbrace{(A\cap B)\cup(A\cap B^c)}_{\text{ξένα}}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AB^c)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(AB^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$$

$$\overset{\substack{\text{ανεξ}\\ A\perp\!\!\!\perp B}}{=} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

$$= \mathbb{P}(A)\left[1 - \mathbb{P}(B)\right]$$

$$= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)$$

■

• Ασυμβίβαστο ⟹ Εξαρτημένο

↳ $AB = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(AB) = 0$

Ω στόσο $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \in (0,1)$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{P}(AB) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, δηλαδή $A \not\perp\!\!\!\perp B$.

Η σχέση "$\perp\!\!\!\perp$"
- ΔΕΝ είναι αυτοπαθής
- είναι συμμετρική
- ΔΕΝ είναι μεταβατική

Ανεξαρτησία Πολλών Ενδεχομένων

Έστω ενδεχόμενα $A, B, C \subseteq \Omega$. Πότε θα λέμε ότι είναι στοχαστικά ανεξάρτητα;

Δοκιμή 1: Ανεξάρτητα ανά δύο $A \perp\!\!\!\perp B \perp\!\!\!\perp C \perp\!\!\!\perp A$

Δοκιμή 2: $\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

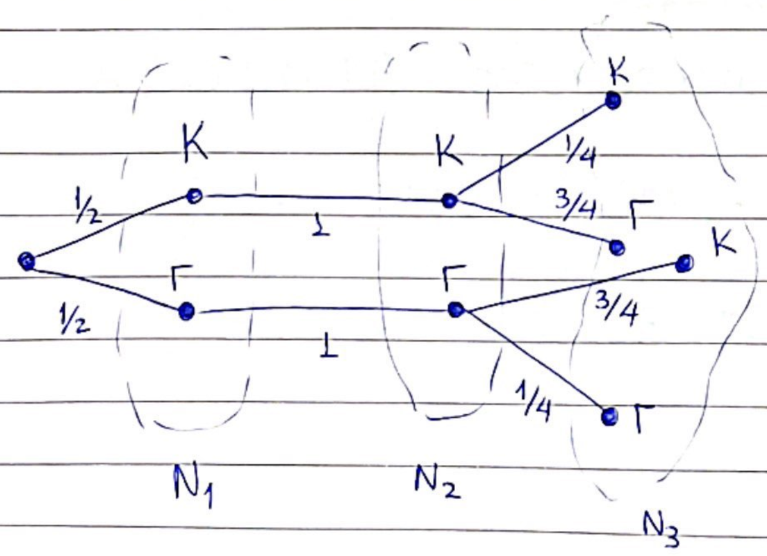
Δοκιμή 3: $A \perp\!\!\!\perp BC$, $B \perp\!\!\!\perp AC$, $C \perp\!\!\!\perp AB$

<u>Έλεγχος:</u> Γίνονται τρεις ρίψεις νομισμάτων $N_i \in \{K, \Gamma\}$, $i = 1, 2, 3$ ως εξής

- <u>Νόμισμα 1:</u> $N_1 \leftarrow K$ ή Γ με πιθ. $1/2$
- <u>Νόμισμα 2:</u> $N_2 \leftarrow N_1$ [Το αποτέλεσμα του N_2 είναι πάντα ίδιο με του N_1]
- <u>Νόμισμα 3:</u> N_3 δίνει K με πιθ. $1/4$ αν το N_1 δώσει K και δίνει Γ με πιθ $1/4$ αν το N_1 δώσει Γ.

$E_i = \{ i$ νόμισμα φέρνει $K\}$. Ποια ενδεχόμενα E_i είναι ανεξάρτητα και ποιες σκέψεις ("δοκιμές") επαληθεύονται;

<u>Σχηματική αναπαράσταση</u>



Δειγματικός χώρος $\Omega = \{\overbrace{KKK}^{1/8}, \overbrace{KK\Gamma}^{3/8}, \overbrace{\Gamma\Gamma K}^{3/8}, \overbrace{\Gamma\Gamma\Gamma}^{1/8}\}$

$E_1 = \{KKK, KK\Gamma\}$

$E_2 = \{KKK, KK\Gamma\}$

$E_3 = \{KKK, \Gamma\Gamma K\}$

$E_1E_2 = \{KKK, KK\Gamma\} = E_1 = E_2$

$E_1E_3 = \{KKK\}$

$\shortparallel$

E_2E_3

$E_1E_2E_3 = \{KKK\}$

$\mathbb{P}(E_1) = 1/2 \qquad \mathbb{P}(E_2) = 1/2 \qquad \mathbb{P}(E_3) = 1/2$

$\mathbb{P}(E_1E_2) = 1/2 \qquad \mathbb{P}(E_1E_3) = 1/8 = \mathbb{P}(E_2E_3)$

$\mathbb{P}(E_1E_2E_3) = 1/8$

Δοκιμή 1 : $E_i \perp\!\!\!\perp E_j \quad \forall i \neq j$?

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(E_1E_2) = 1/2 \\ \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2) = 1/4 \end{array}\right\} \Rightarrow E_1 \not\perp\!\!\!\perp E_2$$

Δοκιμή 2 : $\mathbb{P}(E_1E_2E_3) = 1/8$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(E_1) = 1/2 \\ \mathbb{P}(E_2) = 1/2 \\ \mathbb{P}(E_3) = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(E_3) = 1/8$$

Δοκιμή 3 : $E_i \perp\!\!\!\perp E_jE_k \quad \forall i \neq j \neq k \neq i$

$$(i,j,k) \rightsquigarrow (1,2,3) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1) &= 1/2 \\ \mathbb{P}(E_2E_3) &= 1/8 \\ \mathbb{P}(E_1E_2E_3) &= 1/8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbb{P}(E_1E_2E_3) \\ \cancel{\parallel} \\ \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2E_3) \end{matrix}$$

ΟΡΣ Μία συλλογή ενδεχομένων

$$A_i \subseteq \Omega \quad , \quad i = 1,2,\dots,n$$

λέγεται (στοχαστικά) ανεξάρτητη αν εξ ορισμού

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in \mathcal{J}} A_i\Big) = \prod_{i \in \mathcal{J}} \mathbb{P}(A_i)$$

για κάθε σύνολο δεικτών $\mathcal{J} \subseteq \{1,\dots,n\}$

- $\mathbb{P}(A_iA_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \quad \forall i \neq j$
- $\mathbb{P}(A_iA_jA_k) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A_k) \quad \forall i \neq j \neq k \neq i$
- $\mathbb{P}(A_iA_jA_kA_l) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_l) \quad \forall i,j,k,l$ όλα διαφ.

$\vdots$

κοκ

Συμβολισμός : $\{A_1, \dots, A_n\}_{\perp\!\!\!\perp}$

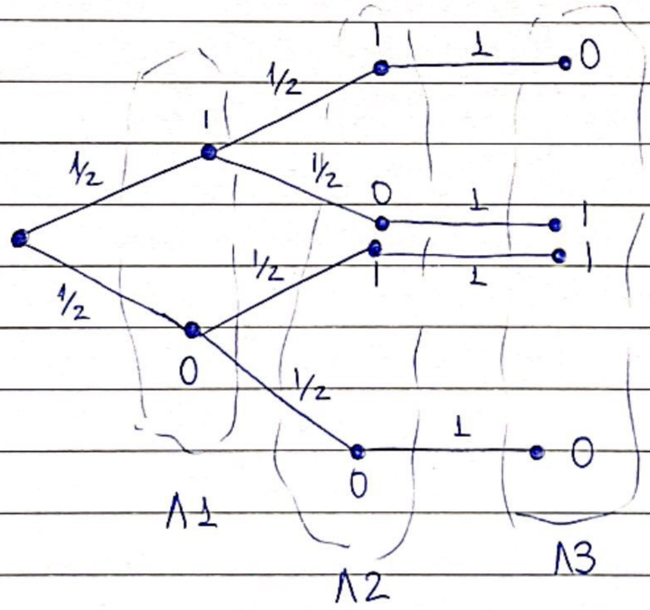
Σημείωση: Έχει ενδιαφέρον τι γίνεται στον ορισμό όταν $\mathcal{J} = \emptyset$

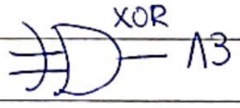
Παράδειγμα. Έχουμε μια διάταξη 3 λαμπτήρων που είναι ανοιχτοί με τις εξής πιθανότητες:

- Λ1 : ανοιχτός με πιθ. $\frac{1}{2}$
- Λ2 : ανοιχτός με πιθ. $\frac{1}{2}$
- Λ3 : ανοιχτός αν μόνο ένας εκ των Λ1, Λ2 είναι ανοιχτός

Αν $E_i = \{Λ_i \text{ είναι ανοιχτός}\}$, να εξεταστεί η ανεξαρτησία των E_i.

Σχηματική Αναπαράσταση



{ **ΣτΜ:** Λ3 = XOR(Λ1, Λ2)  }

$\underline{Ω} = \{\underset{μ\,1/4}{110}, \underset{μ\,1/4}{101}, \underset{μ\,1/4}{011}, \underset{μ\,1/4}{000}\}$

$E_1 = \{110, 101\} \rightsquigarrow 1/2$

$E_2 = \{110, 011\} \rightsquigarrow 1/2$

$E_3 = \{101, 011\} \rightsquigarrow 1/2$

$E_1 E_2 = \{110\} \rightsquigarrow 1/4 \Rightarrow E_1 \perp\!\!\!\perp E_2$

$E_1 E_3 = \{101\} \rightsquigarrow 1/4 \Rightarrow E_1 \perp\!\!\!\perp E_3$

$E_2 E_3 = \{011\} \rightsquigarrow 1/4 \Rightarrow E_2 \perp\!\!\!\perp E_3$

$E_1 E_2 E_3 = \emptyset \rightsquigarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{E_1, E_2, E_3\}_{\not\perp\!\!\!\perp}$