Μάθημα 8 – 14.03.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ

Ασημίνα Παπασυκιώτη
Χριστίνα Τσέκου

Πιθανή αναπλήρωση για 21/3:
Δευτ → 3-6
Τριτ → 3-6
Τετ → 11-2

14/3

(προηγούμενο μάθημα)

Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 2 φορές.

β) Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι η δεύτερη ρίψη Κ δοθέντος ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίψη Κ;

Απάντηση: $\mathbb{P}(2K \mid \text{τουλάχιστον } 1K) = 2/3$

Ενδιαφέροντα ενδεχόμενα $\longrightarrow A = \{\text{τουλ. } 1K\} = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$
$\hookrightarrow B = \{2\text{η ρίψη } K\} = \{KK, \Gamma K\}$
$\Longrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{2}{3}$

Ross: Ποιά είναι η πιθανότητα να φέρουμε και στις δύο ρίψεις Κ δεδομένου ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίψη Κ;

Ενδιαφέροντα ενδεχόμενα $\longrightarrow B_{Ross} = \{2K\} = \{KK\} \Longrightarrow \mathbb{P}(B_{Ross} \mid A) = \frac{1}{3}$

Βασικές Ιδιότητες Δεσμευμένης Πιθανότητας

Θεώρημα Bayes: $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$, $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας: Αν $B_i = 1, 2, \ldots$ διαμέριση του Ω, $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $\forall i$, τότε $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$.

Πολλαπλασιαστικός Νόμος Πιθανοτήτων

Παρατήρηση: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)$
$\hookrightarrow$ "$AB \equiv A \cap B$"

• Για 3 ενδεχόμενα $A, B, C \subseteq \Omega$, έχουμε:

$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A \mid BC)\,\mathbb{P}(BC) = \mathbb{P}(A \mid BC)\,\mathbb{P}(B \mid C)\,\mathbb{P}(C)$

• Γενική διατύπωση:

Έστω οικογένεια ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ με $\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) > 0$.

Τότε, $\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1 \mid A_2 \cdots A_n)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_3 \cdots A_{n-1} A_n) \cdots \mathbb{P}(A_{n-1} \mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n)$

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \mid A_{k+1} \cdots A_n)$$

Προσοχή!

Όταν $\boxed{k=n}$, ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας είναι:

$\mathbb{P}(A_n \mid \bigcap_{k \in \emptyset} A_k) \neq \emptyset$.

Σημείωση διδάσκοντα: το σύνολο που δεν είναι κενό στη σχέση αυτή είναι η τομή μηδενικού αριθμού εκ των A_i, δηλαδή η "κενή τομή" (η οποία είναι ίση με Ω).

Πρόβλημα 1: Μία κάλπη περιέχει 1.000 σφαιρίδια $\begin{cases} 95 \text{ μαύρα} \\ 30 \text{ άσπρα} \\ 945 \text{ κόκκινα} \end{cases}$

Επιλέγουμε τυχαία (χωρίς επανατοποθέτηση) 15 σφαιρίδια. Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε:

1) ακριβώς 3 σφαιρίδια

2) μόνο κόκκινα, αν γνωρίζουμε ότι δεν επιλέχθηκαν μαύρα.

1) Ω = {συνολικοί τρόποι επιλογής 15 σφαιριδίων}

$$\frac{1.000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot \ldots \cdot 986}{15!} = \binom{1.000}{15} = |\Omega|$$

A = {ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια}

$|A|$ = αριθμός τρόπων επιλογής 3 κόκκινων από 945 κόκκινα $= \binom{945}{3}$

× αριθμός τρόπων επιλογής $(15-3)=12$ $\underbrace{\text{μη κόκκινων}}_{\text{άσπρο} \,\cup\, \text{μαύρο}}$ από 55 $\underbrace{\text{μη κοκκ.}}_{\text{άσπρο} \,\cup\, \text{μαύρο}}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1.000}{15}} = \frac{\frac{945!}{942!\,3!} \cdot \frac{55!}{12!\,43!}}{\frac{1.000!}{15!\,985!}}$$

2) Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα $\mathbb{P}(A|B)$, όπου:

A = {επιλέχθηκαν μόνο κόκκινα σφαιρίδια}

B = {δεν επιλέχθηκαν μαύρα}

Εξ' ορισμού $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$

B = {όχι μαύρα} $\longrightarrow$ $|B| = \dbinom{\overset{\text{συνολικά}}{1.000} - \overset{\text{μαύρα}}{95}}{15} = \dbinom{975}{15}$

AB = {μόνο κόκκινα $\cap$ όχι μαύρα} $\longrightarrow$ $|AB| = \dbinom{945}{15}$

Άρα, $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\binom{945}{15}}{\binom{975}{15}}$

Πρόβλημα 2: Μία φαρμακευτική εταιρία διαθέτει ένα τεστ ανίχνευσης κάποιου ιού. Μας γίνεται γνωστό ότι:

- Πιθανότητα αληθούς θετικού = 0,9 = 90%
- Πιθανότητα αληθούς αρνητικού = 0,8 = 80%

Αν 5% του πληθυσμού είναι φορείς του ιού, ποιά η πιθανότητα να είναι φορέας δοθέντος θετικού τεστ;

Οι δοσμένες πιθανότητες εκφράζουν τα εξής:

$A = \{\text{θετικό τεστ}\}$

$B = \{\text{παρουσία ιού}\}$

- $\mathbb{P}(\underbrace{'+'}_{\text{θετικό τεστ}} \mid \underbrace{\text{ιός}}_{\text{παρουσία ιού}}) = 0,9 = \mathbb{P}(A \mid B)$
- $\mathbb{P}(\underbrace{'-'}_{\text{αρνητικό τεστ}} \mid \underbrace{\overline{\text{ιός}}}_{\text{απουσία ιού}}) = 0,8 = \mathbb{P}(\bar{A} \mid \bar{B})$
- $\mathbb{P}(B) = 0,05$

$\mathbb{P}(B \mid A) = \,?$

Από θεώρημα Bayes, έχουμε την αντιστροφή σχέσης:

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \mid \bar{B})$$

$$\mathbb{P}(A \mid \bar{B}) = 0,2 = \frac{\mathbb{P}(A\bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})}$$

Ωστόσο, από θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\underbrace{\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid \bar{B})\,\mathbb{P}(\bar{B})}_{\text{διαμέριση του } \Omega}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid \bar{B})\,\mathbb{P}(\bar{B})$$

Συνολικά: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + [1 - \mathbb{P}(A \mid \bar{B})] \cdot [1 - \mathbb{P}(B)] \implies$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + [1 - \mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B})][1-\mathbb{P}(B)]}$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}95} \approx \frac{0{,}045}{0{,}045 + 0{,}2} \approx 19\%$$

Παρατήρηση: $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{[1-\mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B})]}{\mathbb{P}(A|B)} \frac{[1-\mathbb{P}(B)]}{\mathbb{P}(B)}}_{\text{ελάχιστο}}}$$

$\mathbb{P}(A|\bar{B})$

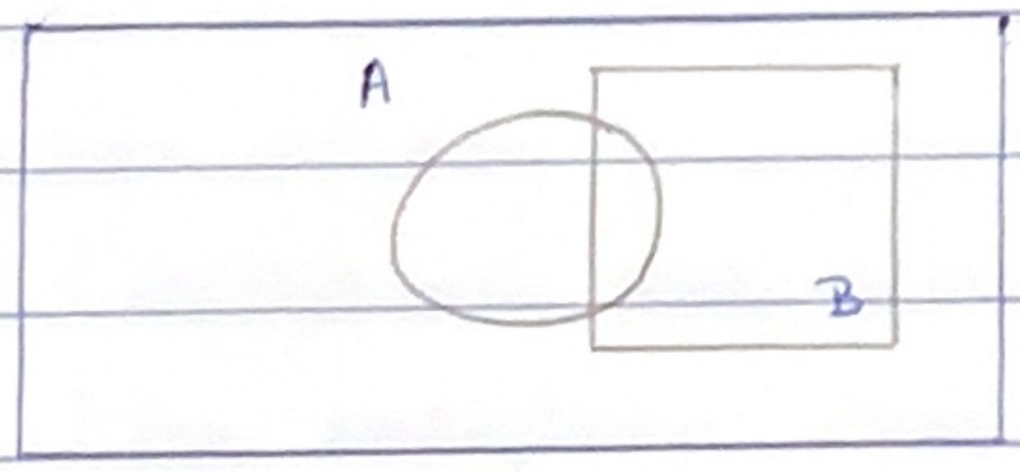
$$\frac{\mathbb{P}(A|\bar{B})}{\mathbb{P}(A|B)} = \frac{\text{ψευδή θετικά τεστ}}{\text{αληθή θετικά τεστ}}$$

Πόρισμα: Η πιθανότητα $\mathbb{P}(B|A)$ είναι τόσο κουτύτερα στο 1 όσο:

① το ενδεχόμενο B είναι συχνό,

② ο λόγος $\frac{\text{ψευδών}}{\text{αληθών}}$ θετικών τεστ είναι μικρός.

Επίδραση πιθανότητας και Στοχαστική ανεξαρτησία



Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στις πιθανότητες;

i) $\mathbb{P}(A)$ {χωρίς πληροφορία}

ii) $\mathbb{P}(A|B)$ {με πληροφορία το B}

⊙ $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$

ορισμός: Η διαφορά $\Delta P = \mathbb{P}(A|B) - \mathbb{P}(A)$ ονομάζεται επίδραση του B στο A. Η επίδραση ΔP προσδιορίζει αν, δοθέντος του B, η πιθανότητα του A:

$\begin{cases} \text{μεγαλώνει} \rightarrow \text{θετική επίδραση } (\Delta P > 0) \\ \text{παραμένει αναλλοίωτη} \rightarrow \text{μηδενική επίδραση } (\Delta P = 0) \\ \text{ελαττώνεται} \rightarrow \text{αρνητική επίδραση } (\Delta P < 0) \end{cases}$

ορισμός: θα λέμε ότι τα A, B είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν εξ' ορισμού $\Delta P = 0 \iff \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.