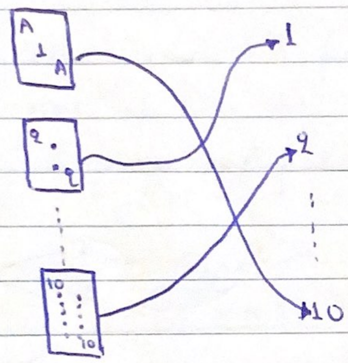
ΓΡΑΦΕΙΣ:
Στέλιος Μολώνης
Σπύρος Νιβολιανίτης

2.3.2023 $\boxed{6^{η} \text{ διάλεξη}}$

Ανακεφαλαίωση: - Πρόβλημα Γενεθλίων
- Τύπος Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
- Απαρίθμηση "αποδιατάξεων"

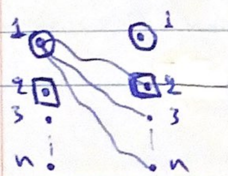
- Απαρίθμηση Αποδιατάξεων: Θέλουμε να μετρήσουμε τις πιθανές διατάξεις n οντοτήτων ώστε η κ-οστή οντότητα να μην αντιστοιχίζεται ποτέ στην κ-οστή θέση.



Ισοδύναμα: αν θεωρήσουμε ότι έχουμε n ανθρώπους, ο καθένας εκ των οποίων έχει ένα δικό του καπέλο, αναζητούμε τον αριθμό των συνταιριασμάτων όπου κανένας άνθρωπος δεν παίρνει το καπέλο του.

(1) Επαγωγική σχέση αποδιατάξεων: Έστω D_n ο αριθμός των αποδιατάξεων n οντοτήτων. Νδο $D_n = (n-1)\left[D_{n-2} + D_{n-1}\right]$

Επιλέγουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας την $1^{η}$ οντότητα και βλέπουμε που απεικονίζεται.



Έχουμε λοιπόν $(n-1)$ επιλογές για την απεικόνιση της $1^{ης}$ οντότητας.

Παράδειγμα με καπέλα:

D_4	
○	○
□	□
△	△
+	+

Για τον ○ → {□, △, +}

○ → □

Δύο περιπτώσεις:

Π1: □ → ○

⇒ έχουμε πλέον 4−2 αντικείμενα
⇒ $D_{4-2} = D_2$ πιθανούς τρόπους.

Π2: □ ↛ ○

⇒ έχουμε τρεις οντότητες {○, △, +} που απεικονίζονται σε {□, △, +} και θέλουμε ○ ↛ □
△ ↛ △
+ ↛ +

Οπότε ισοδύναμα έχουμε 3 ιδιοκτήτες καπέλων ⇒ D_3 πιθανές διατάξεις.

Απλό παράδειγμα (παρόμοιο με το πρόβλημα)

(... συνέχεια) Έστω ότι "1" $\longmapsto$ "i". Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την οντότητα "i".

Περίπτωση 1: "i" $\longmapsto$ "1". Τότε απομένει να απαριθμήσουμε τις αποδιατάξεις (n−2) οντοτήτων ⇒ D_{n-2} συνολικούς τρόπους.

Περίπτωση 2: "i" $\not\longmapsto$ "1". Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε (n−1) οντότητες που πρέπει να απεικονισθούν σε (n−1) αντικείμενα, ούτως ώστε

$$\left.\begin{aligned} "j" &\not\longmapsto "j" \quad \forall j \neq i \\ "i" &\not\longmapsto "1" \end{aligned}\right\} D_{n-1} \text{ συνολικούς τρόπους.}$$

Συνολικά έχουμε
$$\underbrace{(n-1)}_{\text{πιθανές απεικονίσεις της οντότητας "1"}} \times [\underbrace{D_{n-2}}_{\text{απεικονίσεις όπου "i"} \longmapsto \text{"1"}} + \underbrace{D_{n-1}}_{\text{απεικονίσεις όπου "i"} \not\longmapsto \text{"1"}}]$$

② Μη επαγωγική απαρίθμηση αποδιατάξεων

Συνδυαστική

Αναζητούμε τον αριθμό των μεταθέσεων n αντικειμένων ώστε $k \not\mapsto k$ για κάθε $k = 1, \dots, n \implies$ Μεταθέσεις χωρίς κανένα σταθερό σημείο.

Σκέψη: Θα προσπαθήσουμε να μετρήσουμε κατάλληλα τις μεταθέσεις με 1 ή περισσότερα σταθερά σημεία και θα αφαιρέσουμε καταλλήλως.

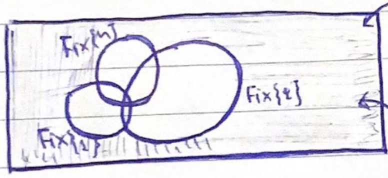
Συμβολισμός: για κάθε υποσύνολο $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ καλούμε $\mathrm{Fix}(A) = \{$μεταθέσεις n στοιχείων ώστε $i \mapsto i \ \forall i \in A\}$ $\left(\mathrm{Fix}(\emptyset) = \{\text{μεταθέσεις } n \text{ στοιχείων}\}\right)$

$\mathrm{Fix}\{1\} = \{$μεταθέσεις που αφήνουν το "1" αναλλοίωτο$\} = \{$μεταθέσεις: $1 \mapsto 1\}$

$\mathrm{Fix}\{2\} =$ -//- -//- -//- "2" -//- -//- -//- $2 \mapsto 2$

⋮

$\mathrm{Fix}\{n\} =$ -//- -//- -//- "n" -//- -//- -//- $n \mapsto n$



$\mathrm{Fix}\{\emptyset\}$ σύνολο όλων των μεταθέσεων n στοιχείων (όλο το σχήμα)

Μεταθέσεις χωρίς σταθερό σημείο (το γραμμοσκιασμένο) $\to$ D_n

• $D_n = \left| \{\text{μεταθέσεις χωρίς σ.σ.}\} \right| = \mathrm{Fix}(\emptyset)$ ← συνολικός αριθμός μεταθέσεων

$- \left[\mathrm{Fix}\{1\} + \mathrm{Fix}\{2\} + \dots + \mathrm{Fix}\{n\}\right]$ ← αριθμός μεταθέσεων με ≥ 1 σ.σ.

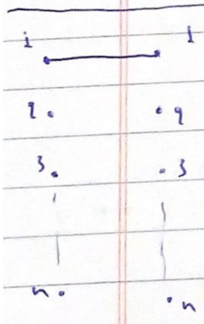
$+ \left[\mathrm{Fix}\{1,2\} + \dots + \mathrm{Fix}\{1,n\} + \dots + \mathrm{Fix}\{n-1,n\}\right]$ ← -//- με ≥ 2 σ.σ.

$- \left[\mathrm{Fix}\{1 2 3\} + \dots + \quad \dots \right]$

$+$

⋮

$+ (-1)^n \, \mathrm{Fix}\{1, \dots, n\}$



$\mathrm{Fix}\{1\} = (n-1)!$

1	n-1	n-2	---	1
1	2	3		n

$\mathrm{Fix}\{1,2\} = (n-2)!$

1	1	n-2	---	1
1	2	3		n

$\cdot\ \text{Fix}\{\emptyset\} = n! = \frac{n!}{0!}$

Άρα, $\cdot\ \text{Fix}\{1\} = (n-1)! \Rightarrow [\text{Fix}\{1\} + \ldots + \text{Fix}\{n\}] = n(n-1)! = n! = \frac{n!}{1!}$

$\cdot\ \text{Fix}\{1,2\} = (n-2)! \Rightarrow [\text{Fix}\{1,2\} + \ldots + \text{Fix}\{1,n\} + \ldots + \text{Fix}\{n-1,n\}] = \binom{n}{2}(n-2)! =$

$= \frac{n!}{2!}$

$\cdot\ \text{Fix}\{1,2,3\} = \frac{n!}{3!}$

Άρα το, $D_n = \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} =$

$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Θυμάστε ότι: $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Το $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow$ $\boxed{\frac{D_n}{n!} \longrightarrow \frac{1}{e} \text{ καθώς } n \to \infty}$

Πρόβλημα: 5 ζευγάρια κάθονται τυχαία (ισοπίθανα)(*) σε ένα κυκλικό τραπέζι, 10 θέσεων. Ποια η πιθανότητα κάθε ζευγάρι να μην κάτσει μαζί;

(A) Κάθε μέλος του ζευγαριού, όχι το ζευγάρι ως οντότητα.

Λύση: $\mathbb{P}(\text{κανένα ζευγάρι}) = \frac{|\text{"ευνοϊκά αποτελέσματα"}|}{|\text{"συνολικά αποτελέσματα"}|}$.

• Συνολικά $(10-1)! = 9!$ κυκλικές διατάξεις 10 ατόμων.

Σκέψεις: Με πόσους τρόπους μπορεί ένα συγκεκριμένο ζευγάρι να κάτσει μαζί?
(ζευγάρι + 8 οντότητες = 9 οντότητες).

9	8	7	6	..	...	..		

$= \frac{9!}{9} = 8!$ κυκλικές διατάξεις.

$\times$ [$\left\{\begin{matrix} \cdot & + \\ + & \cdot \end{matrix}\right.$ 2 διατάξεις του ζευγαριού]

$\Rightarrow 2 \times 8!$.

Σκέψεις: Με πόσους τρόπους μπορούν να κάτσουν μαζί $k=3$ ζευγάρια

$\cdot + \quad \underbrace{\cdot +} \quad \cdot + \quad \underbrace{\cdot +} \quad \underbrace{\cdot +}$

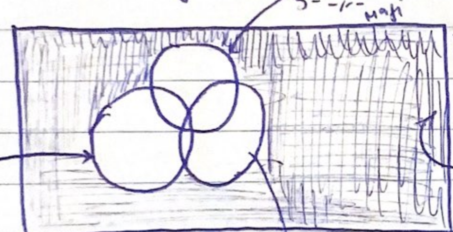
$7!/7$ κυκλικές διατάξεις 7 οντοτήτων.

$\times 2 \times 2 \times 2$

$= 6! \cdot 2^3 \longrightarrow (9-k)! \cdot 2^k$ στη γενική περίπτωση.

Συνολικά, καταλήγουμε στο ότι υπάρχουν $(9-k)! \cdot 2^k$ κυκλικές διατάξεις, όπου ένα δεδομένο σύνολο k ζευγαριών κάθονται μαζί.

$\Rightarrow$ Υπάρχουν συνολικά $\binom{5}{k} \times 2^k \times (9-k)!$ κυκλικές διατάξεις όπου τουλάχιστον k ζευγάρια κάθονται μαζί.



#{κανένα ζευγάρι} = Συνολικός Αριθμός κ. Διατάξεων
− [{#{ζευγάρι 1 μαζί} + #{ζευγάρι 2 μαζί} + … + {ζευγάρι 5 μαζί}}]
+ [#{ζευγάρι 1 κ' 2 μαζί} + #{ζευγάρι 2 κ' 3 μαζί} + … + {ζευγάρι 4 κ' 5 μαζί}]
− [#{ζευγάρι 1 κ' 2 κ' 3 μαζί} + #{ζευγάρι 1 κ' 2 κ' 4 μαζί} + … + {…3 κ' 4 κ' 5 μαζί}]

$$= 9! - \binom{5}{1} \times 2 \times 8! + \binom{5}{2} \times 2^2 \times 7! - \binom{5}{3} \times 2^3 \times 6! + \binom{5}{4} \times 2^4 \times 5! - \binom{5}{5} \times 2^5 \times 4!$$

Τα δύο τελευταία προβλήματα είναι παραδείγματα της αρχής εγκλεισμού - αποκλεισμού (inclusion-exclusion).

Θεώρημα: Έστω ενδεχόμενα $E_1, E_2, \dots, E_n$ ενός δ.χ. Ω με μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$. Τότε έχουμε:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{\substack{k_1<k_2<k_3< \\ \dots <k_n}} \mathbb{P}(E_{k_1} \cap \dots \cap E_{k_r})}$$

(Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού)

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k) - \sum_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1<k_2}}^{n} \mathbb{P}(E_{k_1} \cap E_{k_2})$$

$$+$$

$$\vdots$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_n=1 \\ k_1<k_2<\dots<k_n}}^{n} \mathbb{P}(E_{k_1} \cap E_{k_2} \cap \dots \cap E_{k_n})$$