Διάλεξη ④ 23.2.23

ΓΡΑΦΕΑΣ:
Κωνσταντίνα Νησίδη

→ Αυστηρός Ορισμός Πιθανότητας (σε διακριτά σύνολα)

Ορισμός (κατανομή πιθανότητας)

·Έστω αριθμήσιμο σύνολο Ω [που θα καλείται δειγματικός χώρος].
Ως κατανομή πιθανότητας στα στοιχεία του Ω θα καλείται οποιαδήποτε συνάρτηση $p: \Omega \to [0,1]$ τ.ω. $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$.

↳ Σημείωση: Είναι δυνατό να έχουμε $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) < \infty$ αν ο Ω υπεραριθμήσιμο κ' $p(\omega)>0$ $\forall \omega\in\Omega$?

·Έστω $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = M < \infty$

·Έστω ($\varepsilon>0$) $\Omega_\varepsilon := \{\omega\in\Omega : p(\omega)\geq \varepsilon\} \Rightarrow |\Omega_\varepsilon| \leq M/\varepsilon$

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = M$$
$$\begin{array}{c} \| \\ \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega_\varepsilon} p(\omega)}_{\vee \atop \varepsilon|\Omega_\varepsilon|} + \underbrace{\sum_{\omega\notin\Omega_\varepsilon} p(\omega)}_{>0} \end{array}$$

προάγγελος της ανισότητας Markov!

·Άρα δείξαμε ότι $|\Omega_\varepsilon| \leq M/\varepsilon$ $\forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow \forall n$ $|\Omega_{1/n}| \leq Mn$

Ωστόσο $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{1/n} \Rightarrow \Omega$ αριθμήσιμο άτοπο.

(Δεν είναι εντός ύλης αυτό, βοηθά στην κατανόηση)

Αυτός ο ορισμός έχει νόημα μόνο όταν το Ω είναι αριθμήσιμο. Αλλιώς $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)=1 \Rightarrow p(\omega)>0$ μόνο σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του Ω

Ορισμός (Μέτρο Πιθανότητας)

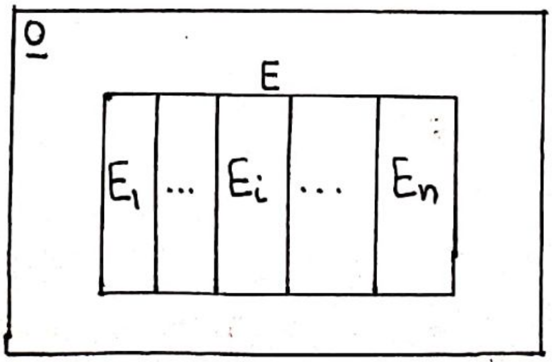
·Έστω αριθμήσιμο σύνολο Ω [που θα καλείται δειγματικός χώρος].
Ως μέτρο πιθανότητας στο Ω ορίζεται κάθε συνάρτηση

$\mathbb{P}: 2^\Omega \to [0,1]$, $E\subseteq\Omega \longmapsto \mathbb{P}(E)\in[0,1]$, τέτοια ώστε:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

και

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$ όπου $E_i \subseteq \Omega$, $E_i\cap E_j = \emptyset$ $\forall i,j$



$\rightsquigarrow \mathbb{P}(E) = \sum_i \mathbb{P}(E_i)$

23.2.2023

Σχέση Μέτρου και κατανομής πιθανότητας

- Μέτρο Πιθανότητας: $\mathbb{P}(E)\ \forall E \subseteq \Omega$

$$\boxed{p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})} \quad \boxed{\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)}$$

- Κατανομή Πιθανότητας: $p(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$

Παράδειγμα

Μέτρο και κατανομή πιθανότητας σε ένα ζάρι.
Στο ζάρι ο δ.χ. είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Σε ένα αμερόληπτο ζάρι, αξιώνουμε ότι $p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=p(6)$
Αυτό είναι μια κατανομή πιθανότητας όταν

$$\sum_{i=1}^{6} p(i) = 1 \Rightarrow \boxed{p(i) = \frac{1}{6}}\ \forall i = 1,2,\dots,6$$

Το επαγόμενο μέτρο πιθανότητας από αυτήν την κατανομή είναι $\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$

$$= \sum_{\omega \in E} 1/6 = \boxed{|E|/6 = \mathbb{P}(E)}$$

Γενική Αρχή: Ισοπίθανα Αποτελέσματα

- Έστω πεπερασμένος δ.χ. Ω. Θα λέμε ότι τα αποτελέσματα του Ω είναι ισοπίθανα όταν $\boxed{p(\omega) = p(\omega')}\ \forall \omega, \omega' \in \Omega$.

Σε αυτήν την περίπτωση το αξίωμα $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ συνεπάγεται ότι $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}\ \forall \omega \in \Omega$.

↳ Πόρισμα ①: Δεν μπορούμε να έχουμε ισοπίθανα αποτελέσματα σε άπειρο δειγματικό χώρο.

↳ Πόρισμα ②: Το επαγόμενο μέτρο πιθανότητας έχει:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) = \sum_{\omega \in E} \frac{1}{|\Omega|} = |E|/|\Omega|$$

23.2.2023

Άσκηση Να δειχθεί ότι το επαγόμενο μέτρο πιθανότητας από μια κατανομή πιθανότητας $p: \Omega \to [0,1]$ ικανοποιεί τα αξιώματα του ορισμού μέτρου πιθανότητας.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Δεδομένης της p έχουμε $\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) \ \forall E \subseteq \Omega$

θ.δ.ο. ① $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, Πράγματι $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ ✓

② $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$ οποτεδήποτε $E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i,j \in \mathbb{N}$

Εξ ορισμού $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{\omega \in E_i} p(\omega) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in E_i} p(\omega)$$

\# $E_i \cap E_j = \emptyset$ οπότε κάθε ω ανήκει μόνο σε ένα E_i

$$= \sum_{\substack{\omega \in E_i \\ \text{για κάποιο } i \in \mathbb{N}}} p(\omega) = \sum_{\omega \in \bigcup_i E_i} p(\omega)$$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \{\omega : \omega \in E_i, i \in \mathbb{N}\}$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \ ✓$$

Βασικές Ιδιότητες Μέτρων Πιθανότητας

① $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E). \ \forall E \subseteq \Omega$

"να μην συμβεί το E" $(E^c = \Omega \setminus E)$

② $E \subseteq F \Rightarrow \mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F) \ \forall E, F \subseteq \Omega$

③ $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

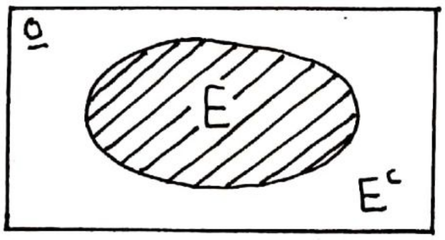
Η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα.

Η πιθανότητα να συμβούν και τα δύο ταυτόχρονα

- Ανεξαρτήτως αν μιλάμε για ισοπίθανες πιθανότητες!
- Δεν είναι αξιώματα!

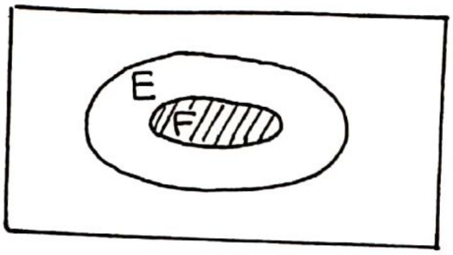
Οπτική Αναπαράσταση με Σχεδιάγραμμα Venn

①



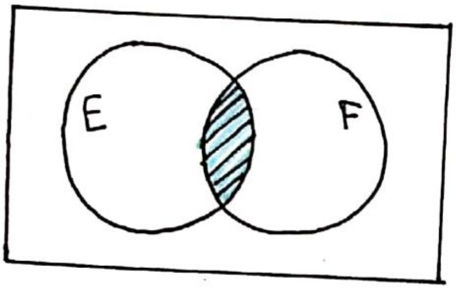
$\Rightarrow \mathbb{P}(E^c) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E)$

②



$\Rightarrow \mathbb{P}(E) \subseteq \mathbb{P}(F)$

③



$\Rightarrow \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

$\boxed{\text{ΠΡΟΒΛΗΜΑ}}$ (Εξετάσεις Ιανουαρίου 2018)

Έχουμε 9 κάρτες δύο όψεων

2 → {κόκκ, κόκκ} , 3 → {πρασ. πρασ.} , 4 → {πρασ, κοκκ.}

Τραβάμε μια κάρτα στην τύχη και γυρνάμε μια της όψη τυχαία (υποθ. ισοπίθανα).

→ Ερώτημα ①: Ποιά η πιθανότητα να τραβήξουμε μια <u>κόκκινη</u> κάρτα?
↳ (και από τις 2 όψεις)

→ Ερώτημα ②: Ποιά η πιθανότητα να αποκαλυφθεί μια κόκκινη όψη?

<u>Λύση</u>:

• Η πιθανότητα κόκκινης κάρτας: $\mathbb{P}(\text{κοκκ κάρτας}) = \dfrac{\#\{\text{κοκκ}, \text{κοκκ}\}}{\#\ \text{καρτών}} = \dfrac{2}{9}$

• $\mathbb{P}(\text{κόκκ. όψη}) = \mathbb{P}(\text{κοκκ}, \text{κοκκ}) + \mathbb{P}(\text{κοκκ}, \text{πρασινο} \cap \text{κοκκ. όψη})$

$= \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{18} = \dfrac{8}{18}$

[άλλο: 18 όψεις
8 κόκκινες όψεις: $\dfrac{8}{18}$ (επειδή είναι όλα ισοπίθανα)]