ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Μερτικόπουλος

9/2/2023

Διάλεξη 1

ΓΡΑΦΕΑΣ: Κωνσταντίνα Νησίδη

Βιβλία: Ross, Χαραλαμπίδης

• Βασικές Ενότητες :

→ Εισαγωγικά στοιχεία πιθανοτήτων
- Συνδιαστική
- Αξιωματική θεμελίωση πιθανοτήτων
- Δεσμευμένη πιθανότητα / ανεξαρτησία / κλπ

→ Τυχαίες Μεταβλητές
- Διακριτές, συνεχείς
- Περιγραφική Στατιστική
- Ροπές, Ροπογεννήτριες

→ Οριακά θεωρήματα
- Ισχυρός / Ασθενής Νόμος μεγάλων αριθμών
- Κεντρικό Οριακό θεώρημα

ΔΥΟ "ΒΑΣΙΚΑ" ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Αγορά ενός προϊόντος online

πχ). Ενός βιβλίου

- Πωλητής 1: 10 reviews, 10 θετικά
- Πωλητής 2: 50 reviews, 48 θετικά
- Πωλητής 3: 200 reviews, 189 θετικά.

Ποιόν προτιμάτε;

Λόγος : $\frac{\text{θετικά}}{\text{συνολικά}}$ $\lambda_1 = \frac{10}{10} = 1$, $\lambda_2 = \frac{48}{50} = 0{,}96$, $\lambda_3 = \frac{189}{200} = 0{,}945$

Η λύση βασίζεται στην Αρχή διαδοχής του Laplace (Laplace succession principle).

→ Αντί του λόγου $\lambda = \frac{\text{θετικά}}{\text{συνολικά}}$ εξετάζουμε τον λόγο $\boxed{L = \frac{\text{θετικά} + 1}{\text{συνολικά} + 2}}$

(προσθέτω 2 εικονικά reviews, ένα θετικό και ένα αρνητικό).

Άρα
- $L_1 = 0{,}91$
- $\boxed{L_2 = 0{,}942}$
- $L_3 = 0{,}9405$

② Ένα απλό στοίχημα

→ Ρίχνουμε 3 ζάρια [Συμβολισμός $3\{6$]

→ Προσθέτουμε για τελικό αποτέλεσμα

<u>Σκέψεις</u>: • Κάπου ανάμεσα σε 3 (1,1,1) και 18 (6,6,6)

0° • 3 ελάχιστο, 18 μέγιστο $\longrightarrow \frac{18+3}{2} = 10,5$

Αν ρίξω ένα ζάρι: 1 2 3 4 5 6

Μ.Ο.: 3,5 $\left(\frac{1+2+3+4+5+6}{6}\right)$ ίσα άλλο: $\frac{1+6}{2}$

<u>Επιλογή ①</u>: Νικάμε αν βγεί 10 ή 11

<u>Επιλογή ②</u>: Νικάμε αν βγεί ≥ 13

<u>Λύση</u>

Θα ξεκινήσω με το <u>ένα ζάρι</u>. (Σκέψη 1η / Απλοποίηση του προβλήματος)

→ Δυνατά ενδεχόμενα: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

$\underbrace{3,4}_{\text{"Επιλογή 1"}}$ $\underbrace{5,6}_{\text{"Επιλογή 2"}}$

{3,4} {5,6}

→ Δυνατά ενδεχόμενα με 2 ζάρια: | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

7 → Μέσος Όρος "Επιλογή 1"

11, 12 "Επιλογή 2"

0! Εδώ δεν είναι όπως πάνω που το κάθε ενδεχόμενο έχει ίδια πιθανότητα.

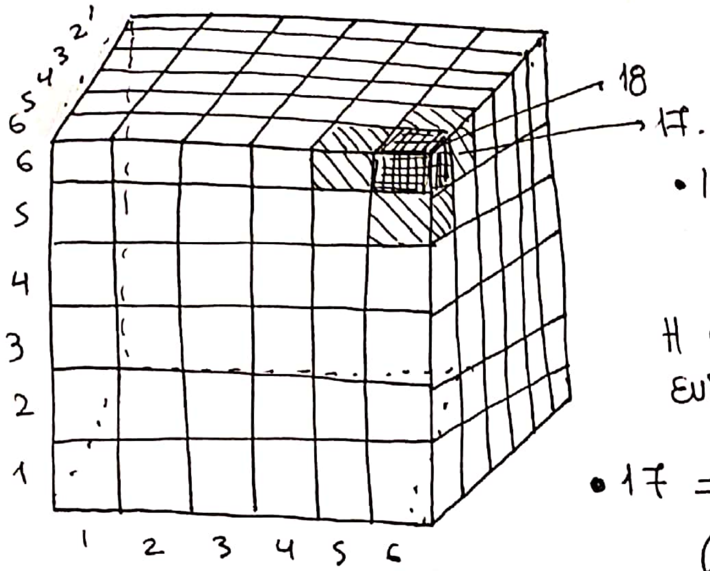
↳ Άρα δεν αρκεί να κοιτάξουμε το πλήθος των ενδεχομένων (ΜΗ ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ)

$Z_2 \backslash Z_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$E_1 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ πιθανότητα

$E_2 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ πιθανότητα

Πρόβλημα 3 ζαριών 9.2.23



Με πόσους τρόπους σχηματίζουμε 18, 17, 16, 15, 14, 11, 10.

• 18 → (6, 6, 6) {1 τρόπος}

↳ ή 6+12 (αποτέλεσμα 2 ζαριών)

Η σκέψη είναι ότι θα σπάμε κάθε ενδεχόμενο ως 2Ζ6 + 1Ζ6.

• 17 =

z_1	z_2, z_3
6	11
5	12

① ② /= 3 τρόποι

• 16 =

z_1+z_2	z_3	
12	4	→ 1
11	5	→ 2
10	6	→ 3

/= 6 τρόποι

↳ (αυτά τα βλέπω από το πίσω κουτάκι).

• 15 $\xrightarrow{\text{επαγωγικά}}$ 6 + 4 τρόπου /= 10 τρόποι

• 14 $\xrightarrow{\dots}$ 10 + 5 /= 15 τρόποι

• 13 $\xrightarrow{\dots}$ 15 + 6 /= 21 τρόποι ↝ Εδώ σταματάει το επαγωγικό επιχείρημα.

↳ Στο 12 αλλάζουν τα πράγματα (το 1 ζάρι δεν μπορεί να πάρει 7).

Αποτέλεσμα για 11:

z_1	z_2+z_3	
1	10	→ 3
2	9	→ 4
3	8	→ 5
4	7	→ 6
5	6	→ 5
6	5	→ 4

+ / 27 τρόποι.

Από συμμετρία έχουμε 27 τρόποι και για το 10.

Επιλογή ①: 10 ή 11 : 27+27 = 54 τρόποι

Επιλογή ②: ≥ 13: 1+3+10+15+21 = 56 τρόποι (≥13)

| 35 τρόποι (≥14)

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ ΜΕΓΑΛΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

9/2/23

↳ ρίχνουμε 100 ζ6 κ' αθροίζουμε το αποτέλεσμα

→ Προσομοίωση σε υπολογιστή δίνει σε 10 φορές: (Μέση τιμή : 350)

↳ 324, 368, 319, 368, $\boxed{\underset{\pm 10}{342}, \underset{\pm 5}{345}, \underset{\pm 10}{360}, \underset{\pm 5}{357}}$, 352, 329

[Η απόκλιση 10 από το 350 (Μ.Τ.) είναι ≃ 3% (όχι μεγάλη)]
· αντίστοιχα για 10,5 το 0,3 για τα 3 ζάρια.

Για ν ζάρια η Μ.Τ. αυξάνεται γραμμικά του ν, η διακύμανση όμως δεν αυξάνεται ανάλογα με το ν.

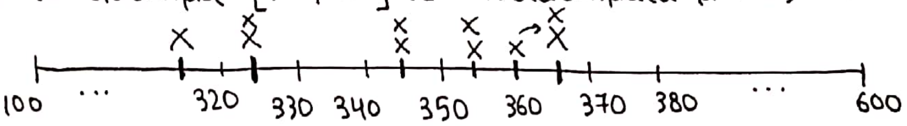
Γενική Παρατήρηση:

→ Αν **n** ζ6, η μέση τιμή του αθροίσματος θα είναι 3.5**n**

→ ωστόσο η διακύμανση γύρω από την Μ.Τ. δεν θα αυξάνεται γραμμικά με το **n**.

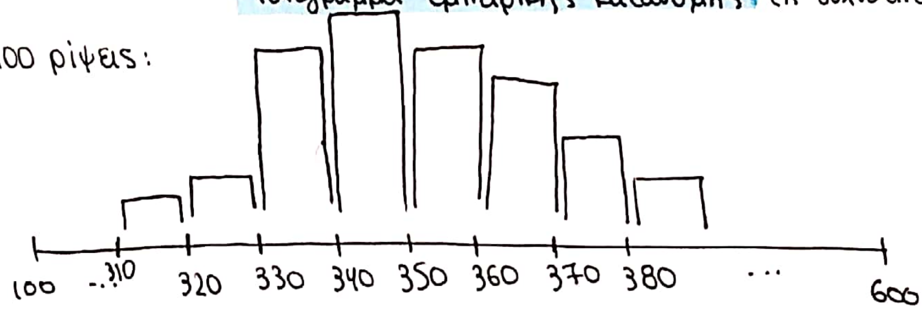
→ Αν δ_n τ.ω. $\frac{\#\{\text{ενδεχομένων τιμής } 3{,}5n \pm \delta_n\}}{\#\{\text{συνολικά ενδεχόμενα}\}} \geq 0.5$, τότε $\frac{\delta_n}{n} \searrow 0$.
↳ "αριθμός"

→ Σπάμε το διάστημα [100,600] σε υποδιαστήματα μήκους 10.

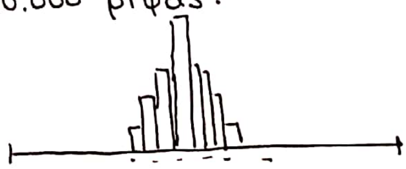


Ιστόγραμμα εμπειρικής κατανομής (ή συχνότητας)

Για 100 ρίψεις:



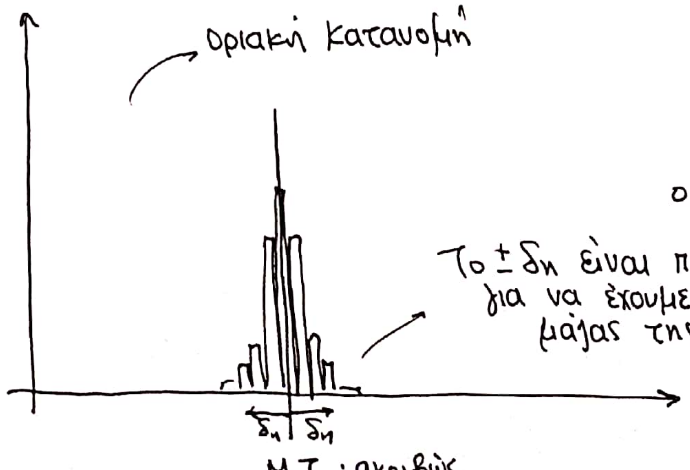
Για 100.000 ρίψεις:



...

Συμπέρασμα: Το σχήμα σταθεροποιείται σιγά-σιγά και προσεγγίζει τη Μ.Τ.

↳ καθώς ο αριθμός αυξάνεται η εμπειρική κατανομή σταθεροποιείται σε ένα καλώς ορισμένο όριο.



Μ.Τ. : ακριβώς στο κέντρο

Το $\pm\delta_n$ είναι πόσο θέλουμε για να έχουμε το μισό της μάζας της κατανομής

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:
→ $\boxed{\delta_n \approx \sqrt{n}}$

↳ Μ.Τ $\pm \delta_n$ μας δίνει την περισσότερη μάζα

→ Προσέγγιση ~~κατανομής~~ μιας γκαουσιανής: $e^{-\frac{x^2}{\delta_n}}$