

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

✉: pmertik@math.uoa.gr

- Βασικές Αρχές Αναρίθμησης
- Εφαρμογές: μεταθέσεις (επαναλ.), συνδιαμοί
- Τρίγωνο Pascal
- Διωνυμικό θεωρήμα $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

ΓΡΑΦΕΙΣ:

Κωνσταντίνα Νησίδη
Παρίια Προτσένκο

Διωνυμικό θεωρήμα (συνέχεια διαλέξης 2)

Επαγωγική απόδειξη του θεωρήματος: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

⊙ Αρχική Δέση $(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0$

⊙ Επαγωγική Δέση ($n \rightarrow n+1$)

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} (x+y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

Σημείωση: $0! = 1$ πως το ορίσω?

$n! = \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \leq n}} k \Rightarrow$

$0! = \prod_{\text{κεφ}} k = 1$

(το κενό γινόμενο είναι 1 και το κενό άθροισμα 0 (ουδέτερο στοιχείο))

Θέλουμε να δείξουμε: $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$

↳ Θα κάνω αλλαγή μεταβλητής: $k+1 = \ell$:

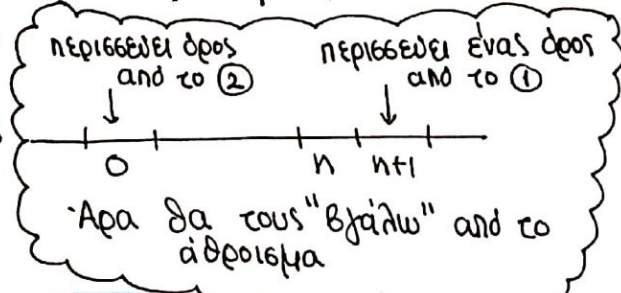
k	0	n
ℓ	1	n+1

$$\textcircled{1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^\ell y^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \textcircled{2}$$

$$= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1}$$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{0}}_1 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_1 y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \quad \blacksquare$$



Από το τρίγωνο του Pascal:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

γιατί είχαμε δείξει:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Παράδειγμα: Ποιό είναι το πλήθος υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία;

→ Το είχαμε βουάξει με άλλο τρόπο!

ΛΥΣΗ

Θα μετρήσουμε επαγωγικά ως προς το πλήθος.

Υποσύνολα με $k=0$ στοιχεία: 1 (το κενό)

Υποσύνολα με $k=1$ στοιχεία: n (όλα τα μονοσύνολα)

Υποσύνολα με k στοιχεία: $\binom{n}{k}$

Συνολικά έχουμε :

αριθμός υποσυνόλων $\leftarrow |P_n| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

$\Rightarrow |P_n| = 2^n$

Παρατηρώ ότι αυτό είναι το διωνυμικό για $x=1=y$:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

1	
1 - 1	= 0
1 - 2 + 1	= 0
1 - 3 + 3 - 1	= 0
1 - 4 + 6 - 4 + 1	= 0
1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1	= 0
1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1	= 0

→ ξεκινάω να εναλλάσσω +, - σε κάθε σειρά.

} Γιατί;

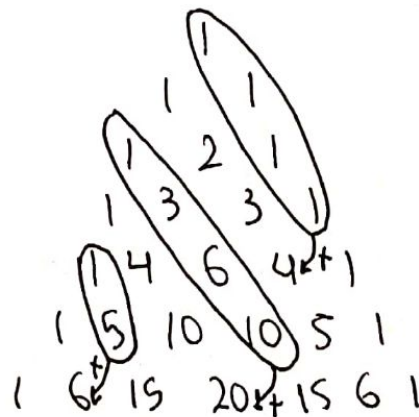
↳ Αν τα προσθέταμε θα είχαν 2^n . ~ διωνυμικό.

Τώρα που αλλάζουν τα πρόσημα, ουσιαστικά πάλι έχουμε το διωνυμικό για $x=-1, y=1$:

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \Rightarrow$$

$$0^n = 0$$

Άλλα παρατήρηση:



Γενίκευση: Πολυωνυμικό θεώρημα (Multinomial)

Ανάπτυγμα r όρων: $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n =$

$$\sum_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ n_i = 0, \dots, n \\ i = 1, \dots, r}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

↳ πολυωνυμικός συντελεστής

Απόδειξη: Αδυναμία

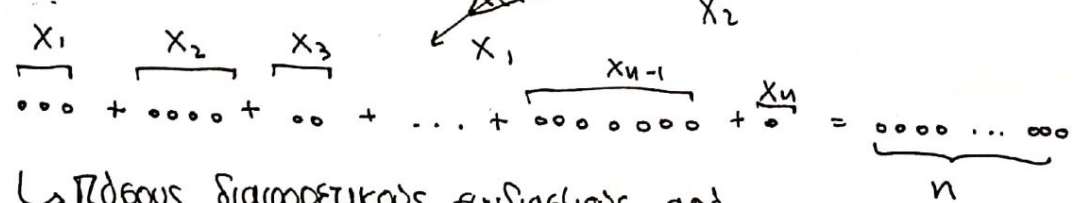
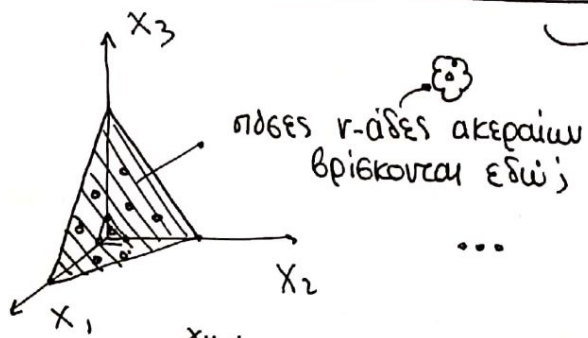
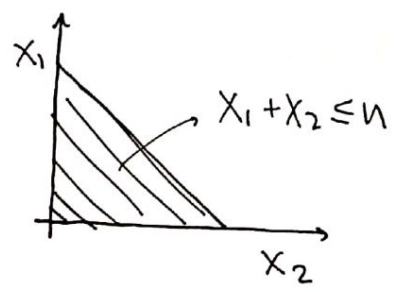
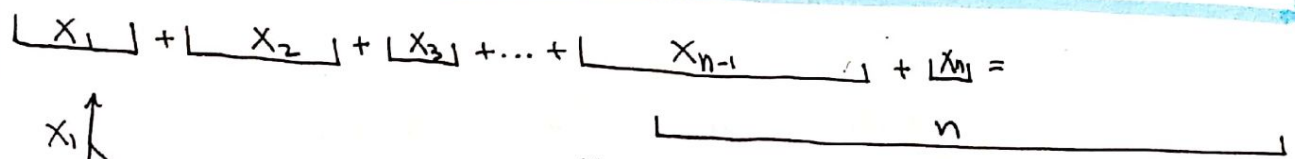
• $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$
 • $(x_1 + \dots + x_r)^n = (x_1 + \dots + x_r)(x_1 + \dots + x_r)\dots(x_1 + \dots + x_r)$
 ↓
 Από n θέσεις με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω x_1, x_2, \dots, x_r αντικείμενα?
 Είναι όπως με τα βιβλία:
 $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ τρόποι επιλογής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Πόσες λύσεις στους θετικούς ακέραιους έχει η εξίσωση $x+y=n$;

Παρατήρηση: $x+y=n \Leftrightarrow y=n-x$
 $x \in \{1, \dots, n-1\} \Leftrightarrow y \in \{1, \dots, n-1\}$
 \Rightarrow Ο αριθμός λύσεων είναι $n-1$.

Ross: Καλύψαμε το κεφ. ①

ΑΜΟ: Πόσες λύσεις στους θετικούς ακέραιους έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$? $\sum r, n \in \mathbb{N}, r \leq n$?



↳ Πόσους διαφορετικούς συνδιασμούς από n τελείες και r σύμβολα πρόσθεσης μπορώ να έχω, φέρονται ότι δεν μπορώ να έχω + στην αρχή και στο τέλος.

Με βάση την παραπάνω συλλογιστική, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την αναρίθμηση των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε (r-1) σύμβολα "+" σε (n-1) κουτάκια (εδώ τα διακενα ανάμεσα στα •)

$\Rightarrow \frac{\binom{n-1}{r-1}}{\dots}$ πλήθος θετικών ακεραίων λύσεων

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Στοιχεία Αξιοματικής Θεμελίωσης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

• **Δειγματικός χώρος** καλείται το σύνολο των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

πχ) → Στην ρίψη ενός ζαριού, ο δ.χ. είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

→ Στο πείραμα επιλογής ενός ανθρώπου και καταγραφής του μήνα γέννησης ο δ.χ. είναι $\Omega = \{\text{Ιανουάριος, Φεβρουάριος, ..., Δεκέμβριος}\}$.

• **Αποτελέσματα** ενός πειράματος τύχης είναι τα στοιχεία/δημιουργήματα του δ.χ. Ω που ορίζει το πείραμα

• **Ενδεχόμενο** ορίζεται ως ένα σύνολο αποτελεσμάτων, δηλαδή ένα υποσύνολο \mathcal{E} του Ω .

πχ) → το ενδεχόμενο να προκύψει άρτιος στη ρίψη ενός ζαριού είναι το σύνολο: $\mathcal{E} = \{2, 4, 6\}$

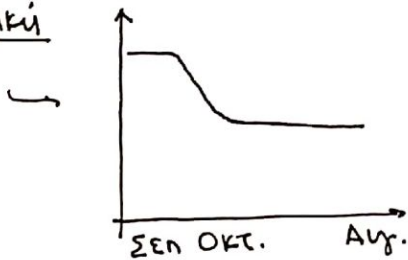
Συμβολισμός:

- Ω : Δειγματικός Χώρος
- \mathcal{E} : Ενδεχόμενο

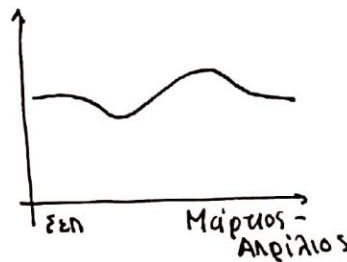
Δεν είναι πάντα ισοπίθανα όλα τα πειράματα.

πχ) το παραπάνω με τις γεννήσεις:

Αμερική



Ευρώπη:



• Ένας νόμος / Ένα **μέτρο πιθανότητας** σε ένα δ.χ. Ω είναι μια απεικόνιση $P: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$, δηλαδή μια απεικόνιση/αντιστοίχιση $\mathcal{E} \mapsto P(\mathcal{E}) \in [0, 1] \forall \mathcal{E} \subseteq \Omega$. Το $P(\mathcal{E})$ θα καλείται **πιθανότητα του ενδεχομένου \mathcal{E}** .

Παράδειγμα: Ισοκατανομή πιθανότητας

Εδώ: ορίζουμε $P(\{ω\}) = \frac{1}{|\Omega|} \forall ω \in \Omega$ → αριθμός

και γενικότερα:

$$P(\mathcal{E}) = \frac{|\mathcal{E}|}{|\Omega|} \quad \forall \mathcal{E} \subseteq \Omega$$