Διάλεξη ③ — 16.2.2023

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

✉: pmertik@math.uoa.gr

ΓΡΑΦΕΙΣ:
Κωνσταντίνα Νησίδη
Μαρία Προτσένκο

- → Βασικές Αρχές Απαρίθμησης
- → Εφαρμογές: μεταθέσεις (/επαναλ.), συνδυασμοί
- → Τρίγωνο Pascal
- → Διωνυμικό θεώρημα $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

$\boxed{\text{Διωνυμικό Θεώρημα}}$ (συνέχεια διάλεξης 2)

· Επαγωγική απόδειξη του θεωρήματος: $\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$

- Αρχική θέση $(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0$
- Επαγωγική θέση $(n \to n+1)$

Σημείωση: $0! = 1$ πως το ορίζω?

$$n! = \prod_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\le n}} k \Rightarrow$$

$$0! \text{"="} \prod_{k\in\emptyset} k = 1$$

(το κενό γινόμενο είναι 1 και το κενό άθροισμα 0 (ουδέτερο στοιχείο))

$$(x+y)^{n+1} = \underline{(x+y)^n}(x+y) =$$

$$= \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}} (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

θέλουμε να δείξουμε: $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$

↳ θα κάνω αλλαγή μεταβλητής: $k+1=\ell$:

k	0	n
ℓ	1	$n+1$

$$\overset{①}{=} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell} y^{n+1-\ell} + \overset{②}{\sum_{k=0}^{n}} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

περισσεύει όρος από το ② περισσεύει ένας όρος από το ①

0 n n+1

Άρα θα τους "βγάλω" από το άθροισμα

$$= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1}$$

Από το τρίγωνο του Pascal:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

γιατί είχαμε δείξει:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$= \underset{\binom{n+1}{0}=1}{\square} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \underset{\binom{n+1}{n+1}=1}{\square} y^{n+1}$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}} \qquad ▨$$

16.2.2023

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$: Ποιό είναι το πλήθος υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία;

⤳ Το είχαμε ξαναδεί με άλλο τρόπο!

ΛΥΣΗ

Θα μετρήσουμε επαγωγικά ως προς το πλήθος.

Υποσύνολα με $k=0$ στοιχεία: 1 (το κενό)

Υποσύνολα με $k=1$ στοιχεία: n (όλα τα μονοσύνολα)

Υποσύνολα με k στοιχεία: $\binom{n}{k}$

Συνολικά έχουμε:

$$|P_n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

αριθμός υποσυνόλων

Παρατηρώ ότι αυτό είναι το διωνυμικό για $x=1=y$:

$$\boxed{(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{|P_n| = 2^n}$$

---

1 → ξεκινάω να εναλλάσσω $+, -$ σε κάθε σειρά.

$1 - 1 = 0$

$1 - 2 + 1 = 0$

$1 - 3 + 3 - 1 = 0$

$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$

$1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$

$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$

Γιατί;

↳ Αν τα προσθέταμε θα έβγαζαν 2^n. ⤳ διωνυμικό.

Τώρα που αλλάζουν τα πρόσημα, ουσιαστικά πάλι έχουμε το διωνυμικό για $x=-1, y=1$:

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \Rightarrow$$

$$0^n = 0.$$

Άλλη Παρατήρηση:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Γενίκευση : $\boxed{\text{Πολυωνυμικό Θεώρημα}}$ (Multinomial) 16.2.23

Ανάπτυγμα r όρων: $(x_1+x_2+\dots+x_r)^n =$

$$\sum_{\substack{n_1+\dots+n_r=n \\ n_i=0,\dots,n \\ i=1,\dots,k}} \underbrace{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}} x_1^{n_1} x_2^{n_2}\cdots x_n^{n_r}$$

↳ πολυωνυμικός συντελεστής

$\boxed{\text{Απόδειξη: Άσκηση}}$

- $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$
- $(x_1+\dots+x_r)^n =$

$(x_1+\dots+x_r)(x_1+\dots+x_r)\dots(x_1+\dots+x_r)$

↓

Από n θέσεις με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω $n_1, n_2, \dots, n_r$ αντικείμενα ?

Είναι όπως με τα βιβλία:

$\boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!} \text{ τρόποι επιλογής}}$

$\boxed{\text{ΠΡΟΒΛΗΜΑ}}$: Πόσες λύσεις στους θετικούς ακεραίους έχει η εξίσωση $x+y=n$;

Ross: Καλύψαμε το Κεφ. 1

Παρατήρηση: $x+y=n \Leftrightarrow y=n-x$

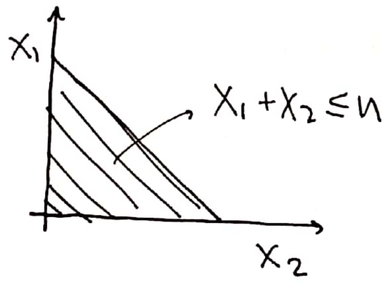
$x\in\{1,\dots,n-1\} \Leftrightarrow y\in\{1,\dots,n-1\}$

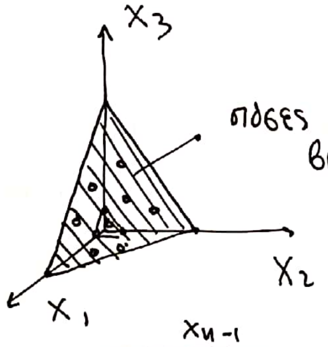
$\Rightarrow$ Ο αριθμός λύσεων είναι $\underline{n-1}$.

ΑΠΟ: Πόσες λύσεις στους θετικούς ακεραίους έχει η εξίσωση $x_1+x_2+x_3+\dots+x_r = n$? $\{r,n\in\mathbb{N}, r\le n\}$.

$$\underbrace{\underline{x_1} + \underline{x_2} + \underline{x_3} + \dots + \underline{x_{n-1}} + \underline{x_n}}_{n} =$$

↳ όλα μαζί τα κουτάκια





...

$$\overset{x_1}{\circ\circ\circ} + \overset{x_2}{\circ\circ\circ\circ} + \overset{x_3}{\circ\circ} + \dots + \overset{x_{n-1}}{\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ} + \overset{x_n}{\circ} = \underbrace{\circ\circ\circ\circ\dots\circ\circ\circ}_{n}$$

↳ Πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς από n τελείες και r σύμβολα πρόσθεσης μπορώ να έχω, ξέροντας ότι δεν μπορώ να έχω + στην αρχή και στο τέλος.

Με βάση την παραπάνω συλλογιστική, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την απαρίθμηση των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε (r-1) σύμβολα "+" σε (n-1) κουτάκια (εδώ τα διάκενα ανάμεσα στα ∘)

$\Rightarrow \boxed{\binom{n-1}{r-1} \text{ τρόποι}}$ / πλήθος θετικών ακέραιων λύσεων

Προβλήματα από Ross: 1.4, 1.6, 1.8/1.9, 1.10, 1.12, 1.17, 1.19 16.2.23

$\boxed{\text{ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ}}$ Στοιχεία Αξιωματικής Θεμελίωσης $\boxed{\text{ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ}}$

- $\boxed{\text{Δειγματικός χώρος}}$ καλείται το σύνολο των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

πχ) → Στην ρίψη ενός ζαριού, ο δ.χ. είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

→ Στο πείραμα επιλογής ενός ανθρώπου και καταγραφής του μήνα γέννησης ο δ.χ. είναι Ω = {Ιανουάριος, Φεβρουάριος, ..., Δεκέμβριος}.

- $\boxed{\text{Αποτελέσματα}}$ ενός πειράματος τύχης είναι τα στοιχεία/σημειοσύνολα του δ.χ. Ω που ορίζει το πείραμα

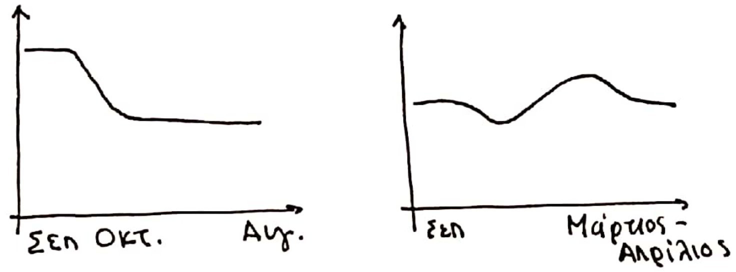
- $\boxed{\text{Ενδεχόμενο}}$ ορίζεται ως ένα σύνολο αποτελεσμάτων, δηλαδή ένα υποσύνολο $\mathcal{E}$ του Ω.

πχ) → το ενδεχόμενο να προκύψει άρτιος στη ρίψη ενός ζαριού είναι το σύνολο:
$\mathcal{E} = \{2,4,6\}$

Συμβολισμός:
- Ω : Δειγματικός χώρος
- $\mathcal{E}$: Ενδεχόμενο

Δεν είναι πάντα ισοπίθανα όλα τα πειράματα.
πχ) Το παραπάνω με τις γεννήσεις:

Αμερική →



← Ευρώπη:

- Ένας νόμος / Ένα $\boxed{\text{μέτρο πιθανότητας}}$ σε ένα δ.χ Ω είναι μια απεικόνιση $\mathbb{P} : 2^{\Omega} \to [0,1]$, δηλαδή μια απεικόνιση/αντιστοίχιση $\mathcal{E} \mapsto \mathbb{P}(\mathcal{E}) \in [0,1]$ $\forall \mathcal{E} \subseteq \Omega$

Το $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ θα καλείται πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Παράδειγμα:}}$ Ισοκατανομή πιθανοτήτων

Εδώ: Ορίζουμε $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ $\forall \omega \in \Omega$ → πληθάριθμος

και γενικότερα:

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \frac{|\mathcal{E}|}{|\Omega|} \quad \forall \mathcal{E} \subseteq \Omega}$$