ΓΡΑΦΕΙΣ:
Χρύσα Νούση
Αλέξανδρος Τσακμακλής

14-2-2023

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΑΡΧΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ:

Όταν έχουμε 2 πειράματα με δυνατό αριθμό ενδεχομένων m, n αντίστοιχως τότε ο συνολικός αριθμός ενδεχομένων είναι m×n.

Συνολοθεωρητικά: $\overset{m}{A}$ $\overset{n}{B}$ $\longrightarrow \overset{m\times n}{A\times B}$

σύνολο ενδεχομένων 1º πειράματος — σύνολο ενδεχομένων 2º πειράματος

Παράδειγμα 1:

$A=\{1,2,3\}$

$B=\{3,4,5\}$

$A\times B=\{(1,3),(2,3),(3,3),(1,4),(2,4),(3,4),(1,5)(2,5),(3,5)\}$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Όταν έχουμε r πειράματα με δυνατό αριθμό ενδεχομένων m_i, $i=1,2,\dots,r$ αντίστοιχως, τότε ο συνολικός αριθμός ενδεχομένων είναι $\prod_{i=1}^{r} m_i = m_1\times\dots\times m_r$

Συνολοθεωρητικά: A_i ← ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ i-ΣΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Παράδειγμα 2:

Πόσους αριθμούς κυκλοφορίας μπορούμε να φτιάξουμε με 24 γράμματα και τα ψηφία 0-9 της μορφής

Γρ	Γρ	Γρ	Αρ	Αρ	Αρ	Αρ

Απάντηση:

$$24\times24\times24\times10\times10\times10\times10 = 24^3\cdot10^4$$

Αν είχαμε τον περιορισμό ότι οι αριθμοί δεν ξεκινάνε με 0 έχουμε:

$$24\times24\times24\times9\times9\times9\times9 = 24^3\cdot9^4$$

Παράδειγμα 3: Έστω ένα σύνολο A με n στοιχεία πόσες απεικονίσεις $f: A \to A$ υπάρχουν?

Απάντηση:
Μια απεικόνιση $f: A \to A$ απλώς αντιστοιχίζει στοιχεία σε στοιχεία

n	n	n						n
1	2	3						n

$= n^n$

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n\text{-φορές}} = n^n$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: Πόσες απεικονίσεις από σύνολο A ($|A|=n$) σε σύνολο B ($|B|=m$)? $[f: A \to B]$

Αντικείμενο προς μέτρηση

m	m	m						m
1	2	3						n: στοιχεία του A

$= m^n$

Παράδειγμα 4:
Έστω ένα σύνολο A με n στοιχεία. Πόσα υποσύνολα έχει το A?

Απάντηση:

2	2					2
1	2					n: στοιχεία του A

$= 2^n$ υποσύνολα

(2 επιλογές: βάζω ή δεν βάζω στοιχείο)

$\boxed{\text{Εναλλακτικά: ένα υποσύνολο ταυτίζεται με μια απεικόνιση } f: A \to \{0,1\} \Rightarrow 2^n}$

Σημείωση: $P_A = 2^A = \{0,1\}^A$

Παράδειγμα 5:

Πόσες "1-1" απεικονίσεις μπορούμε να φτιάξουμε από ένα σύνολο n στοιχείων στον εαυτό του?

Απάντηση:

n	$n-1$	$n-2$			2	1

$\Rightarrow$ Συνολικά $n!$ επιλογές

1 2 3 … $n-1$ n: στοιχεία του A

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να διαταχθούν n αντικείμενα

n	$n-1$	$n-2$	....	...	2	1

Έχουμε $n!$ δυνατές μεταθέσεις

P_n

Παράδειγμα 6:

Έχουμε 3 βιβλία μαθηματικών 5 φυσικής, 4 χημείας. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα φτιάξουμε?

Απάντηση:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$=12!$

$|3|2|1| \times |5|4|3|2|1| \times |4|3|2|1| = 3!5!4!$

$\div$

$$\Rightarrow \frac{12!}{3!5!4!}$$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ:

Ο συνολικός αριθμός μεταθέσεων n αντικειμένων τα οποία είναι διαμεριζόμενα σε r ομάδες στοιχείων πλήθους n_i, $i=1,\dots,r$ $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ δίνεται απο τον τύπο

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}}$$

Παράδειγμα 7:

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να κατασκευάσουμε μια (α) διατεταγμένη (β) μη διατεταγμένη 6 αδα απο τα ψηφία 1-49?

Απάντηση: α)

| 49 | 48 | 47 | 46 | 45 | 44 |

$$49\times48\times47\times46\times45\times44 = \frac{49\times48\times\dots\times44\times43\times42\times\dots1}{43\times42\times\dots1} = \frac{49!}{43!}$$

β) Το προβλημα είναι ισοδύναμο με τον αριθμό μεταθέσεων 49 αντικειμένων, 6 εκ των οποίων είναι χρώματος κοκκινου (επιλ) 43 χρώματος μαυρου (⇒ δεν επιλέγονται) ⇒

$$\left.\begin{array}{l} n=49 \\ n_1=43 \quad n_2=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{49!}{43!\,6!}$$

$$\frac{|49|48|47|46|45|44|}{|6|5|4|3|2|1|} = \frac{49\times\dots\times44}{6!} = \frac{49!}{6!\,43!}$$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ:

Ο αριθμός μη διατεταγμένων υποσυνόλων k στοιχείων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$ → Συνδυασμός n αντικειμένων ανα k

↳ Διωνυμικός Συντελεστής

ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ PASCAL

											ΓΡΑΜΜΗ
					1						0
				1		1					1
			1		2		1				2
		1		3		3		1			3
	1		4		6		4		1		4
1		5		$\boxed{10}$ (5,3)		10		5		1	5

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ:

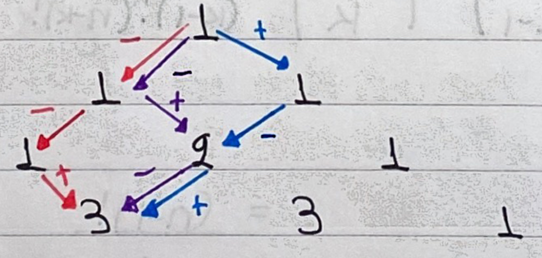
→ Έστω Pas(n,k) ο αριθμός που βρίσκεται στην (n,k) θέση του τριγώνου του Pascal

→ Εξ' ορισμού: $\boxed{Pas(n,k) = Pas(n-1,k-1) + Pas(n-1,k)}$ *

→ "Δείξαμε" επαγωγικά ότι Pas(n,k) = # διαδρομών** που ενώνουν τη ρίζα (0,0) με το στοιχείο (n,k) του τριγώνου

* Με την σύμβαση Pas(r,n)=0 όταν n>r

** Διαδρομή: κατεβαίνουμε μια γραμμή και στρίβουμε δεξιά (+) ή αριστερά (−)



Για το (3,1) έχουμε τις διαδρομές

− − +

− + −

\+ − −

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Για το (4,2) έχουμε τις διαδρομές:

$$
\left.
\begin{array}{cccc}
- & - & + & + \\
- & + & - & + \\
- & + & + & - \\
+ & + & - & - \\
+ & - & + & - \\
+ & - & - & +
\end{array}
\right\} \begin{array}{l} 2\text{ "+"} \\ 2\text{ "-"} \end{array}
$$

Δείξαμε ότι $Pas(n,k) = \binom{n}{k}$

Πόρισμα: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Απόδειξη (2η):

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\ \frac{n}{(n-k)n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

→ Διωνυμα: $(x+y)^n$

→ Ποιο το αναπτυγμα του διωνυμου για διαφορετικα n?

→ $n=0$ $\quad (x+y)^0=1$

→ $n=1$ $\quad (x+y)^1 = 1\cdot x+1\cdot y$

→ $n=2$ $\quad (x+y)^2= 1\cdot x^2+2xy+1\cdot y^2$

→ $n=3$ $\quad (x+y)^3 = 1\cdot x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3$

PASCAL

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

ΣΚΕΨΕΙΣ

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) =$ xxx

xxy → Συντελεστής φαίνεται να είναι

xyy $\quad \binom{n}{k} \rightsquigarrow \binom{3}{2}$

yyy

$$(x+y)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$