Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$$\mathbb{K}^{n+1} = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n+1 \text{ φορές}}$$

$$= \{(a_0, a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$$

$$\mathbb{K}^{\infty} = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots$$

$$= \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{K}\} \text{ σύνολο ακολουθιών}$$

$$A = \{(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$$

$$= \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } a_m = 0 \ \forall\, m > n\}$$

= σύνολο ακολουθιών σχεδόν μηδενικών

Σημαντική παρατήρηση:

Στα μαθηματικά, «σχεδόν όλα» σημαίνει «όλα εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος» (όταν πρόκειται για άπειρα στοιχεία)

Το σύνολο A αποκτά δομή δακτυλίου για την

πρόσθεση:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

και πολλαπλασιασμό:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 \cdot b_0, a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots)$$

Το σύνολο A αποκτά <u>καλή</u> δομή δακτυλίου για την πρόσθεση:

$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \dots)$

και πολλαπλασιασμό:

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (c_0, c_1, c_2, \dots)$

όπου $c_k = \sum\limits_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i b_j = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Οπότε:

$c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$

κ.ο.κ.

Το A με αυτή τη δομή δακτυλίου συμβολίζεται ως $\mathbb{K}[X]$ και ονομάζεται δακτύλιος των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{K}$

Έχουμε $0_{\mathbb{K}[X]} = (0,0,0,0,\dots)$

$1_{\mathbb{K}[X]} = (1,0,0,0,\dots)$

Ο $\mathbb{K}[X]$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

Επιπλέον, είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος με εξωτερικό πολλαπλασιασμό:

$\lambda \cdot (a_0, a_1, a_2, \dots) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \dots) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[X] = \infty$

Μια βάση δίνεται από τα παρακάτω στοιχεία:

$(1,0,0,0,\ldots) = 1_{\mathbb{K}[X]}$

$(0,1,0,0,\ldots) =: X$ (συμβολισμός)

$(0,0,1,0,\ldots) = X^2$

$(0,0,0,1,\ldots) = X^3$

και γενικότερα έχουμε $X^n = (0,0,0,\ldots,0,\underset{\uparrow \atop a_n}{1},0,0,\ldots)$

Οπότε

$(a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots) = a_0 \cdot 1 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots + a_n X^n =: P$

δεν το γράφουμε

όπου n είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός για τον οποίο $a_n \neq 0$

Ο αριθμός n είναι ο βαθμός του πολυωνύμου και συμβολίζεται με $\deg P$ και ο a_n είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του πολυωνύμου. Έχουμε $\deg P \in \mathbb{N}$. Ο a_0 λέγεται σταθερός όρος.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Αν $\deg P = 0$, τότε $P \in \mathbb{K}^*$ και λέγεται σταθερό πολυώνυμο.
- $\nexists \deg 0$ ή $\deg 0 := -\infty$.

Αν $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $a_n \neq 0$

και $Q = b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$, $b_m \neq 0$

τότε $PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ όπου $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Παράδειγμα:

$P = X^3 + 3X^2 + 1$

$Q = X^2 + 2X + 4$

$P \cdot Q = X^5 + 2X^4 + 4X^3 + 3X^4 + 6X^3 + 12X^2 + X^2 + 2X + 4$

$= X^5 + 5X^4 + 10X^3 + 13X^2 + 2X + 4$

Πρόταση: $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ $\boxed{c_{n+m} = a_n b_m}$

Παρατηρήσεις:

- Η απόδειξη στηρίζεται στο ότι το $\mathbb{K}$ είναι «ακέραια περιοχή» δηλαδή αν $ab=0$ για κάποια $a,b \in \mathbb{K}$, τότε $a=b=0$.
- Ο δακτύλιος $\mathbb{K}[X]$ είναι ακέραια περιοχή.
  (Απόδειξη: Αν $PQ=0$, τότε $a_n b_m = 0$ και άρα $P=0$ ή $Q=0$)
- Ο δακτύλιος $\mathbb{K}[X]$ δεν είναι σώμα.
  Τα μόνα αντιστρέψιμα στοιχεία του είναι τα πολυώνυμα βαθμού 0 (δηλ. τα στοιχεία του $\mathbb{K}^*$)
  (Απόδειξη: Αν $P \cdot Q = 1$, τότε $\deg P + \deg Q = \deg 1 = 0$
  Αφού $\deg P, \deg Q \in \mathbb{N}$, αναγκαστικά $\deg P = \deg Q = 0$.
  Επίσης όλα τα στοιχεία του $\mathbb{K}^*$ είναι αντιστρέψιμα)
- Αν $\deg 0 \in \mathbb{N}$, τότε η πρόταση δεν ισχύει.
  (Απόδειξη: Αν $\deg 0 \in \mathbb{N}$, τότε $\deg(P \cdot 0) = \deg P + \deg 0$ για κάθε $P \in \mathbb{K}[X]$, και άρα $\deg P = 0$ για κάθε $P \in \mathbb{K}[X]$)

Πρόταση: $\deg(P+Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\}$

(με την ισότητα να ισχύει αν $\deg P \neq \deg Q$)

Παραδείγματα:

$P = X^2+3,\ Q = X-1 \Rightarrow P+Q = X^2+X+2$

$P = X^2+3,\ Q = -X^2+1 \Rightarrow P+Q = 4$

Τελικες παρατηρήσεις

- Η ίδια δομη δακτυλιου μπορεί να δοθεί στο σύνολο $\mathbb{K}^\infty$ το οποίο τότε συμβολίζεται ως $\mathbb{K}[[X]]$ και τα στοιχεία του ως $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$. Ο δακτύλιος $\mathbb{K}[[X]]$ ονομάζεται δακτύλιος τυπικών δυναμοσειρών.

  Ο δακτύλιος $\mathbb{K}[X]$ είναι υποδακτυλιος του $\mathbb{K}[[X]]$

  Το σώμα $\mathbb{K}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{K}[X]$

- Οι δακτύλιοι $R[X]$ και $R[[X]]$ μπορούν να οριστούν για οποιοδήποτε δακτυλιο R

  ΟΜΩΣ:

  $R[X]$ μεταθετικός $\Leftrightarrow$ R μεταθετικός

  $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \Leftrightarrow R$ ακέραια περιοχή

  Επίσης, δεν ισχύει η Ευκλείδεια διαίρεση πάντα.

Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμων

Έστω $A, B \in \mathbb{K}[X]$ με $B \neq 0$.

Υπάρχουν (μοναδικά) $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ τέτοια ώστε

$A = QB + R$ και $\deg R < \deg B$ ή $R = 0$

Το πολυώνυμο Q λέγεται πηλίκο της διαίρεσης

και το πολυώνυμο R λέγεται υπόλοιπο της διαίρεσης.

Αν $R = 0$, λέμε ότι το B διαιρεί το A ή ότι το A είναι πολλαπλάσιο του B και γράφουμε $B \mid A$.

Παρατήρηση:

Αν $\deg A < \deg B$, τότε $Q = 0$ και $R = A$

Παραδείγματα:

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 + 2X + 2 & X+2 \\ \cline{2-2}
-(X^3 + 2X^2) & X^2 - 2X + 6 \\ \cline{1-1}
-2X^2 + 2X + 2 & \\
-(-2X^2 - 4X) & \\ \cline{1-1}
6X + 2 & \\
-(6X + 12) & \\ \cline{1-1}
-10 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
X^2 + 3X + 2 & X+2 \\ \cline{2-2}
-(X^2 + 2X) & X + 1 \\ \cline{1-1}
X + 2 & \\
-(X+2) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Παρατήρηση:

Αν $A = QB + R$ και $\deg R < \deg B$ (ή $R = 0$) τότε το Q είναι το πηλίκο και το R το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του A με το B.

Λήμμα: $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

(1) Αν $B | A$, τότε $\deg B \leq \deg A$.

(2) Αν $B | A$ και $A | B$, τότε υπάρχει $u \in \mathbb{K}^*$ τέτοιο ώστε $A = uB$.

Απόδειξη: (1) Αν $B | A$, τότε υπάρχει $Q \in \mathbb{K}[X]$ τέτοιο ώστε $A = QB$. Άρα $\deg A = \deg(QB) = \deg Q + \deg B \geqslant \deg B$

(2) Από το (1) προκύπτει ότι $\deg A = \deg B$

Αν τώρα $A = QB$, τότε $\deg Q = 0$ και άρα $Q \in \mathbb{K}^*$.

Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας (Εαρινό εξάμηνο 2022-23) (MATH120)

Ασκήσεις

Προεπισκόπηση

Άσκηση 8

Δέκα ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που θα απαντήσετε online. Κάθε ερώτηση έχει μόνο μία σωστή απάντηση.

Ερώτηση: 1

Σε τι αντιστοιχούν στο μιγαδικό επίπεδο οι λύσεις της εξίσωσης |z|=|z-1|;

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	Σε έναν κύκλο. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Σε μια ευθεία. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Σε ένα σημείο. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Σε δύο σημεία. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Σε τίποτα από τα παραπάνω. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 2

Έστω z=x+yi ένας μιγαδικός αριθμός με μέτρο |z|=1 και όρισμα Arg(z)=π/8. Το Arg(x+yi)-Arg(x-yi) είναι ίσο με:

Απάντηση		Σχόλιο
☐	0. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	π/2. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	π/4. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	π/8. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	-π/2. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	-π/4. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	-π/8. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 3

Η πρόταση "ο μιγαδικός αριθμός z είναι πρωταρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας αν και μόνο αν ο συζυγής του z είναι πρωταρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας" είναι:

Απάντηση	Σχόλιο

☑	αληθής. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	ψευδής. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 4

Έστω z=1+i√3 και w=1+i. Ποιο είναι το μέτρο του πηλίκου z/w;

Απάντηση		**Σχόλιο**
☐	1 **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	√2 **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	2 **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	1/√2 **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 5

Έστω z=1+i√3 και w=1+i. Ποιο είναι το όρισμα του πηλίκου z/w;

Απάντηση	**Σχόλιο**

☐	2π/3 **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	π/8 **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	π/6 **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	π/12 **(Βαθμολογία: 1)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 6

Έστω z=1+i√3 και w=1+i. Ποιο είναι το μέτρο του παρακάτω μιγαδικού αριθμού;

$$\left(\frac{z}{w}\right)^{10}$$

Απάντηση		**Σχόλιο**
☐	1 **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	2^5 **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	2^{10} **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	2^{-5} **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	2^{-10} **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 7

Έστω z=1+i√3 και w=1+i. Ποιο είναι το όρισμα του παρακάτω μιγαδικού αριθμού;

$$\left(\frac{z}{w}\right)^{10}$$

	Απάντηση	**Σχόλιο**
☐	π/3 **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	π/6 **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	π/4 **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	2π/3 **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	5π/6 **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	3π/4 **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 8

Έστω z=1+i√3. Τι πρέπει να είναι ο φυσικός αριθμός ν ώστε ο z^ν να είναι πραγματικός αριθμός;

Απάντηση		**Σχόλιο**
☐	Άρτιος. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Περιττός. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Πολλαπλάσιο του 3. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Της μορφής 3κ+1 για κάποιον ακέραιο κ. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Της μορφής 3κ+2 για κάποιον ακέραιο κ. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Της μορφής κ/2 για κάποιον ακέραιο κ. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 9

Έστω w=1+i. Τι πρέπει να είναι ο φυσικός αριθμός ν ώστε ο w^ν να είναι φανταστικός αριθμός;

Απάντηση		**Σχόλιο**
☐	Άρτιος της μορφής 4κ για κάποιον ακέραιο κ. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Άρτιος της μορφής 4κ+2 για κάποιον ακέραιο κ. **(Βαθμολογία: 1)**	

☐	Περιττός της μορφής 4κ+1 για κάποιον ακέραιο κ. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Περιττός της μορφής 4κ+3 για κάποιον ακέραιο κ. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Της μορφής κ/2 για κάποιον ακέραιο κ. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 10

Έστω w=1+i και x τέτοιος ώστε x^2=w√2. Τι από τα παρακάτω μπορεί να ισχύει;

Απάντηση		**Σχόλιο**
☐	|x|=|w| και Arg(x)=π/4. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	$\|x\|=\|w\|^{1/2}$ και Arg(x)=π/4. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	|x|=|w| και Arg(x)=π/8. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	$\|x\|=\|w\|^{1/2}$ και Arg(x)=π/8. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Συνολική βαθμολογία: 10