Ένα τελευταίο παράδειγμα μαθηματικής επαγωγής

Αν $xy = yx$, τότε $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Απόδειξη Με επαγωγή

ΒΗΜΑ 1: $(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0 \Leftrightarrow 1 = 1$ ΑΛΗΘΗΣ

$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y + x$

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

ΒΗΜΑ 3: Θα δείξουμε ότι $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

$$\overset{\text{υπ.επ.}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right)(x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^\ell y^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell y^{n+1-\ell}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \left[\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell} \right] x^\ell y^{n+1-\ell} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

γιατί $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Η παραπάνω ισότητα αποδεικνύεται είτε συνδυαστικά, είτε υπολογιστικά:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!\,k + n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Αν προσπαθήσετε να αποδείξετε την παραπάνω ισότητα με επαγωγή θα δυσκολευτείτε.

A, B σύνολα

$A = \{x, y\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ καρτεσιανό γινόμενο του A και του B

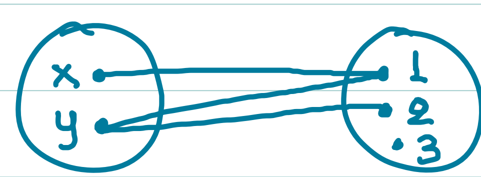
$A \times B = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3)\}$

$B \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

! $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Μια <u>σχέση</u> μεταξύ στοιχείων του A και στοιχείων του B είναι ένα υποσύνολο R του $A \times B$. Θα γράφουμε aRb αν $(a,b) \in R$.

$R = \{(x,1), (y,1), (y,2)\}$

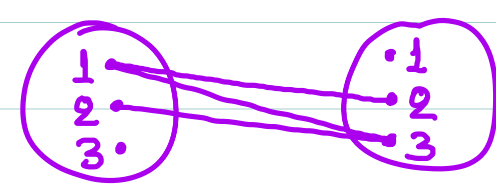


$xR1$, $yR1$, $yR2$

$\tilde{R} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$1 \underset{<}{\tilde{R}} 2$, $1 \underset{<}{\tilde{R}} 3$, $2 \underset{<}{\tilde{R}} 3$

$\tilde{R} = \{(b, b') \in B \times B \mid b < b'\}$



Μια <u>απεικόνιση</u> μεταξυ στοιχείων του A και στοιχείων του B είναι μια σχέση R που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες :

• για κάθε $a \in A$, υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε aRb

• αν aRb, $a'Rb'$ και $a = a'$, τότε $b = b'$ (όπου $a, a' \in A$ και $b, b' \in B$).

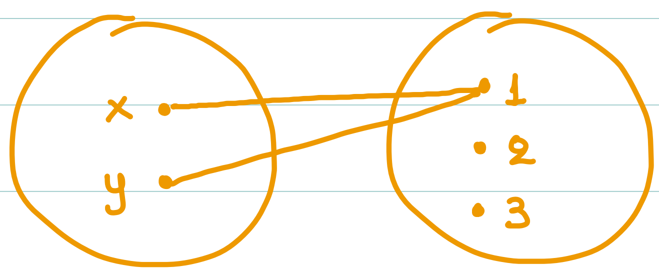
Ισοδύναμα: για κάθε $a \in A$, υπάρχει μοναδικό $b \in B$ τέτοιο ώστε aRb

Συμβολισμός: $f : A \longrightarrow B$, $a \longmapsto f(a) = b$ αν aRb.

Η R δεν είναι απεικόνιση. Η $\tilde{R}$ δεν είναι απεικόνιση

<u>Παρατήρηση</u>: Η λέξη «απεικόνιση» συνηθίζεται στην Άλγεβρα.

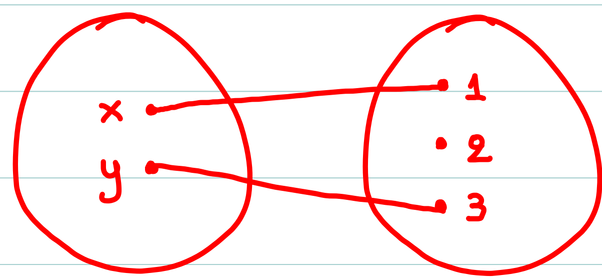
Στην Ανάλυση, λέμε «συνάρτηση».



Όχι 1-1

Όχι επί

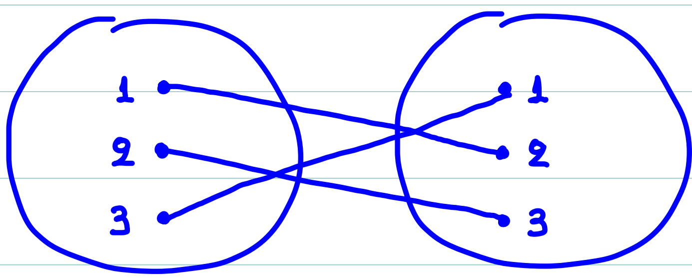
$f(x) = 1$, $f(y) = 1$



1-1

όχι επί

$g(x) = 1$, $g(y) = 3$



1-1 και επί

$h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(3) = 1$

Ορισμοί: Έστω $f: A \longrightarrow B$ μια απεικόνιση.

- Η f είναι 1-1 αν η f ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη για κάθε $a, a' \in A$: αν $a \neq a'$, τότε $f(a) \neq f(a')$

  (ισοδύναμα: αν $f(a) = f(a')$, τότε $a = a'$)

- Η f είναι επί αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a_b \in A$ τέτοιο ώστε $f(a_b) = b$

- Η f είναι αντιστρέψιμη αν είναι 1-1 και επί.

  Τότε μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1}: B \longrightarrow A$ όπου $f^{-1}(b) = a_b$. Η f^{-1} είναι καλά ορισμένη γιατί η f είναι 1-1

- Αν $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ απεικονίσεις, ορίζουμε τη σύνθεση $g \circ f: A \longrightarrow C$ ως $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ για κάθε $a \in A$.

Παρατήρηση:

Αν η f είναι 1-1 και επί, τότε

$f^{-1} \circ f = id_A : A \longrightarrow A, \; a \longmapsto a$

$f \circ f^{-1} = id_B : B \longrightarrow B, \; b \longmapsto b$

Παραδείγματα:

- $id_A : A \longrightarrow A$ είναι 1-1 και επί
- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$ δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί $\quad x^2 \neq -1 \; \forall x \in \mathbb{R}$
- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^2$ δεν είναι 1-1, αλλά είναι επί $\quad f(1) = f(-1)$
- $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^2$ είναι 1-1 και επί

Συμβολισμοί:

$f : A \longrightarrow B$ απεικόνιση, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$

- $f(C) = \{ f(c) \mid c \in C \}$
- $f^{-1}(D) = \{ a \in A \mid f(a) \in D \}$

Παρατηρήσεις:

- $f(A) \subseteq B$
- f επί $\Leftrightarrow f(A) = B$
- f επί $\Leftrightarrow |f^{-1}(\{b\})| \geq 1$ για κάθε $b \in B$
- f 1-1 $\Leftrightarrow |f^{-1}(\{b\})| \leq 1$ για κάθε $b \in B$
- f αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow |f^{-1}(\{b\})| = 1$ για κάθε $b \in B$.

  Αν $f^{-1}(\{b\}) = a$, τότε $f^{-1}(b) = a$.
- $f^{-1}(B) = A$

Παράδειγμα:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

$f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}$

$f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$

$f^{-1}(\{0\}) = 0$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$f^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}^*$