Συμβολισμοί

$\mathbb{N}$: φυσικοί αριθμοί.

$\mathbb{Z}$: ακέραιοι αριθμοί

$\mathbb{Q}$: ρητοί αριθμοί

$\mathbb{R}$: πραγματικοί αριθμοί

$\mathbb{C}$: μιγαδικοί αριθμοί

Προτασιακός Λογισμός

Πρόταση (δηλωτική) :

Ένας ισχυρισμός που έχει νόημα, είναι από μόνος του αληθής ή ψευδής, αλλά όχι και τα δύο.

Παραδείγματα δηλωτικών προτάσεων

- Η Χλουβεράκη είναι μαθηματικός.
- Όλοι οι μαθητές στην τάξη είναι ξανθοί.
- Υπάρχει μαθηματικός που δεν του αρέσει ο καφές.
- Αύριο θα βρέξει ή θα χιονίσει.
- Αν φας όλο το φαγητό σου, θα δεις τηλεόραση.
- Το 3 είναι πρώτος αριθμός.
- Το 3 είναι μεγαλύτερο του 5.
- Το 3 διαιρεί το 6 και το 15
- Το 3 διαιρεί το 6 και το 8.
- Το 3 διαιρεί το 6 ή το 8.
- Αν το x είναι μεγαλύτερο του 5, τότε το $x+1$ είναι μεγαλύτερο του 6.
- Αν το x είναι μεγαλύτερο του 5, τότε το $x+1$ είναι μεγαλύτερο του 8.
- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί
- Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων. (εικασία του Goldbach).

Παραδείγματα μη δηλωτικών προτάσεων

- Άνοιξε την πόρτα.
- Γιατί το 6 δεν είναι πρώτος;
- Η Σακίρα είναι όμορφη.
- Αυτή η πρόταση είναι ψευδής.

Μια δηλωτική πρόταση τη συμβολίζουμε με κάποιο γράμμα του λατινικού αλφαβήτου:

p : " Ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός "

R : " Αν ο ακέραιος x είναι πολλαπλάσιο του 6, τότε ο x είναι άρτιος ".

εμφάνιση μεταβλητής

P : " Αν a, b είναι τα μήκη των καθέτων πλευρών ενος ορθογωνίου τριγώνου και c το μήκος της υποτείνουσας, τότε $a^2 + b^2 = c^2$ "
(Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Q : " Αν a, b, c, n είναι ακέραιοι με $n > 2$, τότε $a^n + b^n \neq c^n$ "
(Τελευταίο Θεώρημα του Fermat)

Άρνηση προτάσεων

Ορισμός Η άρνηση μιας πρότασης p είναι μια πρόταση $\neg p$, η οποία είναι ψευδής, όταν η p είναι αληθής.

Παράδειγμα:

p : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος

¬p : Δεν ισχύει η p

Δεν είναι αληθές ότι ο αριθμός 2 είναι άρτιος.

Ο αριθμος 2 δεν είναι άρτιος

Ο αριθμος 2 είναι περιττός !!!

Παρατήρηση: $\neg(\neg p) \equiv p$ (αληθής, όταν η p είναι αληθής)

Παραδείγματα:

p : Όλοι οι μαθητές στην τάξη είναι ξανθοί.

¬p : Δεν ισχύει ότι όλοι οι μαθητες στην τάξη είναι ξανθοί.

Υπάρχει μαθητής στην τάξη που δεν είναι ξανθός

q : Υπάρχει μαθηματικος που δεν του αρέσει ο καφές

¬q : Δεν υπάρχει μαθηματικός που δεν του αρέσει ο καφές.

Σε όλους τους μαθηματικούς αρέσει ο καφές.

r : Ο τοίχος είναι μαύρος

¬r : Ο τοίχος δεν είναι μαύρος

Ο τοίχος έχει ένα χρώμα διαφορετικό από το μαυρο

s : Η εξίσωση $x^2+1=0$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

¬s : Δεν ισχύει ότι η εξίσωση $x^2+1=0$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$

Η εξίσωση $x^2+1=0$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

t : Η εξίσωση $x^2-4=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{N}$.

$\neg t$: Δεν ισχύει ότι η εξίσωση $x^2-4=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{N}$

Η εξίσωση $x^2-4=0$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{N}$ ή έχει περισσότερες από μία λύση στο $\mathbb{N}$

Σύζευξη και διάζευξη προτάσεων

Σύζευξη : p και q Συμβ. $p \wedge q$

Παραδείγματα:

- p : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος

  q : Ο αριθμος 4 είναι άρτιος

  $p \wedge q$: Οι αριθμοί 2 και 4 είναι άρτιοι.

  $\neg(p \wedge q)$: Δεν είναι αληθές ότι οι αριθμοί 2 και 4 είναι άρτιοι

  Τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς 2 και 4 δεν είναι άρτιος.

  Ο αριθμός 2 δεν είναι άρτιος ή ο αριθμός 4 δεν είναι άρτιος.

- P : Η Μαρία είναι ξανθιά.

  Q : Η Μαρία έχει μπλε μάτια.

  $P \wedge Q$: Η Μαρία είναι ξανθιά με μπλε μάτια

  $\neg(P \wedge Q)$: Δεν είναι αληθές ότι η Μαρία είναι ξανθιά με μπλε ματιά.

  Μπορεί να μην είναι ξανθιά, μπορεί να μην έχει μπλε μάτια

  Η Μαρία δεν είναι ξανθιά ή δεν έχει μπλε μάτια.

Διάζευξη : p ή q Συμβ. $p \vee q$
(περιεκτική)

<u>Παραδείγματα:</u>

- p : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος

  q : Ο αριθμός 3 είναι άρτιος

  $p \vee q$: Ο αριθμός 2 είναι άρτιος ή ο αριθμός 3 είναι άρτιος

  $\neg(p \vee q)$: Δεν είναι αληθές ότι ο 2 ή ο 3 είναι άρτιοι

  Οι αριθμοί 2 και 3 δεν είναι άρτιοι

- P : Αύριο θα βρέξει

  Q : Αύριο θα χιονίσει

  $P \vee Q$: Αύριο θα βρέξει ή θα χιονίσει

  $\neg(P \vee Q)$: Δεν είναι αληθές ότι αύριο θα βρέξει ή θα χιονίσει.

  Αύριο ούτε θα βρέξει ούτε θα χιονίσει.

  Αύριο δε θα βρέξει <u>και</u> δε θα χιονίσει

<u>Παρατήρηση</u> : Στα μαθηματικά ο όρος «ή» επιτρέπει να ισχύουν και οι δύο προτάσεις ταυτόχρονα. Όταν μιλάμε, συχνά τον χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε αποκλειστική διάζευξη (π.χ. να παραγγείλουμε πίτσα ή σουβλάκια;). Στα μαθηματικά, αυτό δηλώνεται με «ή ... ή ...», «είτε ... είτε ...», «... ή ..., αλλά όχι και τα δύο»
Συμβολίζεται ως $p \underline{\vee} q$.

Παραδείγματα:

- p : ο ακέραιος x είναι άρτιος

  q : ο ακέραιος x είναι περιττός

$p \veebar q$: ο ακέραιος x ή είναι άρτιος ή είναι περιττός.

ο ακέραιος x είναι άρτιος ή περιττός, αλλά όχι και τα δύο

$\neg(p \veebar q)$: ο ακεραιος x ή δεν είναι ούτε άρτιος ούτε περιττός

ή ο ακέραιος x είναι άρτιος και περιττός.

- P : Αύριο θα βρέξει

  Q : Αύριο θα χιονίσει

$P \veebar Q$: Αύριο ή θα βρέξει ή θα χιονίσει.

$\neg(P \veebar Q)$: Αυριο ούτε θα βρέξει, ούτε θα χιονίσει ή θα γίνουν και τα δύο.

Πίνακες Αληθείας

p	$\neg p$
Α	Ψ
Ψ	Α

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$
Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Άσκηση 1 : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Άσκηση 2 : $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Συνεπαγωγή προτάσεων

Αν p, τότε q. Συμβ. $p \Rightarrow q$

υπόθεση
παραδοχή

συμπέρασμα

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η πρόταση p (η p είναι αληθής), τότε (αναγκαστικά) ισχύει η q (η q είναι αληθής)

Παραδείγματα:

- p : Ο αριθμός x είναι ρητός.

  q : Ο αριθμός $\sqrt{x}$ είναι ρητός.

$p \Rightarrow q$: Αν ο θετικός αριθμος x είναι ρητός, τότε ο $\sqrt{x}$ είναι ρητός.

$\neg(p \Rightarrow q)$: Δεν ισχύει ότι αν ο x είναι ρητος, τότε ο $\sqrt{x}$ είναι ρητός

Ο αριθμός x είναι ρητός, αλλά ο $\sqrt{x}$ είναι άρρητος.

- P : Πηγαίνω στη λαϊκή στις 9:00.

  Q : Βρίσκω φρέσκο ψάρι.

$P \Rightarrow Q$: Αν πάω στη λαϊκή στις 9:00, βρίσκω φρεσκο ψάρι.

$\neg(P \Rightarrow Q)$: Πάω στη λαϊκή στις 9:00, αλλά δε βρίσκω φρέσκο ψάρι.

p	q	$p \Rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

<u>Παρατήρηση</u>:

Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

- Αν η γιαγιά μου είχε καρούλια, θα ήταν τρόλεϊ.
- Αν ο αριθμός 4 είναι περιττός, τότε ισχύει η εικασία του Goldbach.
- Αν υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών, τότε ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός.

! Το σύμβολο $\Rightarrow$ δεν υποδηλώνει ύπαρξη απόδειξης στον προτασιακό λογισμό.

Ισοδύναμες εκφράσεις για $p \Rightarrow q$:

- q, αν p.
- Η p είναι ικανή συνθήκη για την q.
- Για να ισχύει το q, αρκεί να ισχύει το p
- Η q είναι αναγκαία συνθήκη για την p.
- Η p ισχύει μόνο αν ισχύει η q.
- Δε γίνεται να ισχύει η p και να μην ισχύει η q.

Παραδείγματα στην πραγματική ζωή

- Αν βρέξει, δε θα έρθω στη συνάντηση.
- Αν δεν ψηφίσεις το κόμμα αυτό, οι συντάξεις θα μειωθούν.
- Αν μπορείς να λύσεις το πρόβλημα αυτό, είσαι ιδιοφυΐα.

p	q	$p \Rightarrow q$	αντίστροφη $q \Rightarrow p$	αντίθετη $\neg p \Rightarrow \neg q$	αντιθετοαντίστροφη $\neg q \Rightarrow \neg p$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α