Αρμονική Ανάλυση (2023–24)

Ασκήσεις

(Παραδίδετε προαιρετικά δέκα από τις Ασκήσεις. Προθεσμία: 23-5-2024.)

1. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X)<\infty$. Δείξτε ότι: αν $1\leq p<r<\infty$ τότε $L^r(X)\subseteq L^p(X)$ και, για κάθε $f\in L^r(X)$,

$$\|f\|_{L^p}\leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|f\|_{L^r}.$$

2. (α) Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου. Θεωρούμε τον χώρο $L^\infty(X)$ που αποτελείται από όλες τις (κλάσεις ισοδυναμίας) μετρήσιμες συναρτήσεις $f:X\to\mathbb{C}$ που είναι «ουσιαστικά φραγμένες». Δηλαδή, $f\in L^\infty(X)$ αν και μόνο αν υπάρχει $M=M(f)\geq 0$ ώστε $\mu(\{x\in X:|f(x)|>M\})=0$. Δείξτε ότι: αν $f\in L^\infty$ τότε υπάρχει ελάχιστος τέτοιος $M(f)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $\|f\|_\infty$. Στην συνέχεια, αποδείξτε ότι ο $(L^\infty(X),\|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu(X)<\infty$. Δείξτε ότι: αν $f\in L^\infty(X)$ τότε για κάθε $1\leq p<\infty$ έχουμε $f\in L^p(X)$ και

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty.$$

3. Έστω (X_1,μ_1) και (X_2,μ_2) δύο σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου και έστω $1\leq p\leq\infty$. Αν $f:X_1\times X_2\to[0,\infty)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$\left\|\int_{X_2}f(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)\right\|_{L^p(X_1)}\leq\int_{X_2}\|f(x_1,x_2)\|_{L^p(X_1)}d\mu_2(x_2).$$

4. Έστω $p_j\geq 1$ με $\sum_{j=1}^N 1/p_j=1$. Αν $f_j\in L^{p_j}(X)$, $1\leq j\leq N$, αποδείξτε ότι

$$\left\|\prod_{j=1}^N f_j\right\|_{L^1(X)}\leq\prod_{j=1}^N\|f_j\|_{L^{p_j}(X)}.$$

5. Για κάθε $t>0$ ορίζουμε $\mathcal{H}_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με

$$\mathcal{H}_t(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/4t}.$$

Δείξτε ότι η οικογένεια $(\mathcal{H}_\delta)$, όπου $\delta=\sqrt{t}$, είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

6. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c>0$ ώστε

$$f^*(x)\geq\frac{c}{|x|^n}\quad\text{για κάθε } |x|\geq 1,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

7. Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια προσέγγιση της μονάδας. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c>0$ ώστε

$$\sup_{\delta>0}|(f*K_\delta)(x)|\leq cf^*(x)$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f.

8. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε, για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$ ισχύει $m(E \cap I) \geq \alpha m(I)$. Δείξτε ότι $m(E) = 1$.

9. (α) Θεωρήστε την αναλυτική συνάρτηση $f(z) = e^{-\pi z^2}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy για το ορθογώνιο με κορυφές $-R, R, R+ix, -R+ix$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t x} dt = e^{-\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = e^{-\pi x^2}$$

για κάθε $x > 0$.

(β) Έστω $G(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

10. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $k \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η f είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και για κάθε $0 \leq j \leq k$ ισχύει $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

και

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{c(k,f)}{|\xi|^k}, \qquad \xi \neq 0$$

όπου η σταθερά $c(k,f)$ εξαρτάται από το k και την f (αλλά όχι από το ξ).

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f'' είναι συνεχής και ότι $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

11. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $g(x) = xf(x)$. Αν $g \in L^1(\mathbb{R}$, δείξτε ότι η $\widehat{f}$ είναι παραγωγίσιμη και

$$\left(\widehat{f}\right)'(\xi) = -2\pi i \widehat{g}(\xi).$$

12. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = f(x+t) - f(x)$ δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{g}$ της g έχει άπειρες ρίζες.

13. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)\,d\xi.$$

14. (α) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Υπολογίστε το

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

15. Δείξτε ότι: για κάθε $\epsilon > 0$ η συνάρτηση $F(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\epsilon}}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την

$$f(x) = \int_0^{\infty} K_{\delta}(x) e^{-\pi\delta} \delta^{\epsilon - 1} d\delta,$$

όπου $K_{\delta}(x) = \delta^{-n/2} e^{-\pi |x|^2/\delta}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini ελέγξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\pi\delta|\xi|^2} e^{-\pi\delta} \delta^{\epsilon-1} d\delta.$$

Τέλος, υπολογίστε αυτό το ολοκλήρωμα (θα χρειαστείτε την $\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$, $s>0$).

16. (α) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos(nx)}{nx^2}$, $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\|g_n*f-f\|_1=0.$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R})$ ο μετασχηματισμός Fourier της g_n*f έχει συμπαγή φορέα, άρα οι $h\in L^1(\mathbb{R})$ που έχουν μετασχηματισμό Fourier με συμπαγή φορέα σχηματίζουν πυκνό υποσύνολο του $L^1(\mathbb{R})$.

17. Έστω $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι

$$\int_a^b x^2|f(x)|^2dx\geqslant\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty x^2|f(x)|^2dx$$

και

$$\int_c^d \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\geqslant\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Δείξτε ότι

$$(b-a)(d-c)\geqslant\frac{1}{2\pi}.$$

18. Θεωρούμε τον *τελεστή του Hermite* $L:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})$ που ορίζεται από την σχέση

$$L(f)=-\frac{d^2f}{dx^2}+x^2f.$$

Στον $S(\mathbb{R})$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\langle L(f),f\rangle\geqslant\langle f,f\rangle$$

για κάθε $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (υπόδειξη: ολοκλήρωση κατά μέρη).

(β) Θεωρούμε τους τελεστές A και A^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A(f)=\frac{df}{dx}+xf\qquad\text{και}\qquad A^*(f)=-\frac{df}{dx}+xf.$$

Δείξτε ότι, για κάθε $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

1. $\langle A(f),g\rangle=\langle f,A^*(g)\rangle$.
2. $\langle A(f),A(f)\rangle=\langle A^*A(f),f\rangle\geqslant 0$.
3. $A^*A=L-I$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

(γ) Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τους τελεστές A_t και A_t^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A_t(f)=\frac{df}{dx}+txf\qquad\text{και}\qquad A_t^*(f)=-\frac{df}{dx}+txf.$$

Δείξτε ότι $\langle A_t^*A_t(f),f\rangle\geqslant 0$ και με βάση αυτήν την παρατήρηση δώστε μια δεύτερη απόδειξη της αρχής της αβεβαιότητας: αν $\int_{-\infty}^\infty|f(x)|^2dx=1$, τότε

$$\left(\int_{-\infty}^\infty x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{-\infty}^\infty\left|\frac{df}{dx}\right|^2dx\right)\geqslant\frac{1}{4}.$$