Αρμονική Ανάλυση

Πρόχειρες Σημειώσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
2014-15

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι L^p

1.1 Ο χώρος $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Για ευκολία, θα θεωρούμε πάντα ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο: δηλαδή, ότι μπορούμε να γράψουμε $X = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s$, όπου $A_s \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_s) < \infty$ για κάθε $s \geqslant 1$.

Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}^p(\mu)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{K}$ (όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) για τις οποίες

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p(\mu)$ θέτοντας $f \sim g$ αν $f = g$ μ-σχεδόν παντού. Το σύνολο $L^p(\mu)$ των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[f] + [g] = [f + g] \ \text{ και } \ a[f] = [af].$$

Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο f για την κλάση $[f]$, εννοώντας ότι η $[f] \in L^p(\mu)$ αντιπροσωπεύεται από οποιαδήποτε συνάρτηση στοιχείο της. Αν λοιπόν $f \in L^p(\mu)$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν μ-σχεδόν παντού γίνεται για να ικανοποιείται η $\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f = 0$. Πράγματι, αν $\int_X |f|^p d\mu = 0$ τότε $f = 0$ μ-σχεδόν παντού, δηλαδή $[f] = [0]$.

Θα δείξουμε ότι η $\| \cdot \|_p$ είναι νόρμα. Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $L^p(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος: Πράγματι, έστω $f, g \in L^p(\mu)$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant \left(2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}\right)^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

άρα

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leqslant 2^p \left(\int_X |f|^p \, d\mu + \int_X |g|^p \, d\mu \right) < \infty,$$

δηλαδή $f+g \in L^p(\mu)$.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Ο χώρος $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Προφανώς, $\|f\|_p \geqslant 0$ για κάθε $f \in L^p(\mu)$, και είδαμε ότι αν $\|f\|_p = 0$ τότε $f = 0$. Είναι επίσης άμεσο ότι αν $f \in L^p(\mu)$ και $a \in \mathbb{K}$, τότε

$$\|af\|_p = |a| \|f\|_p.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Αυτή προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Minkowski, την οποία δείχνουμε παρακάτω. □

Λήμμα 1.1.2 (ανισότητα Young)**.** *Αν $x, y \geqslant 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{1.1.1}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^m t_j \ln a_j \leqslant \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m),$$

από την ανισότητα Jensen. Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \leqslant t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{1.1.2}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}.$$

Ειδική περίπτωση της (1.1.2) είναι η

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b. \tag{1.1.3}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (1.1.3) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, επιλέγοντας $t = \frac{1}{p}$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

Ορισμός 1.1.3 (συζυγείς εκθέτες)**.** Αν $p,q>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p=1$ είναι ο $q=\infty$.

Πρόταση 1.1.4 (ανισότητα Hölder)**.** *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f\in L^p(\mu)$ και $g\in L^q(\mu)$, όπου $p,q>1$ συζυγείς εκθέτες. Τότε, $fg\in L^1(\mu)$ και*

$$\int_X |fg|\,d\mu\leqslant\left(\int_X|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X|g|^q\,d\mu\right)^{1/q}, \tag{1.1.4}$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q. \tag{1.1.5}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p=\int_X|f|^p\,d\mu=1\ \text{ και }\ \|g\|_q^q=\int_X|g|^q\,d\mu=1.$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $x\in X$ ισχύει

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{1}{p}|f(x)|^p+\frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\int_X|fg|\,d\mu\leqslant\frac{1}{p}\int_X|f|^p\,d\mu+\frac{1}{q}\int_X|g|^q\,d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1=\|f\|_p\|g\|_q.$$

Στην γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p\neq 0$ και $\|g\|_q\neq 0$ (αλλιώς $f\equiv 0$ ή $g\equiv 0$ $\mu-$σχεδόν παντού και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1=\frac{f}{\|f\|_p}\ \text{ και }\ g_1=\frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_X|f_1|^p\,d\mu=\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_X|f|^p\,d\mu=1\ \text{ και }\ \int_X|g_1|^q\,d\mu=\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_X|g|^q\,d\mu=1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_X|f_1g_1|\,d\mu\leqslant 1,\ \text{ δηλαδή, }\ \int_X|fg|\,d\mu\leqslant\|f\|_p\|g\|_q.$$

□

Πρόταση 1.1.5 (ανισότητα Minkowski)**.** *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ενας χώρος μέτρου και $1\leqslant p<\infty$. Αν $f,g\in L^p(\mu)$, τότε*

$$\left(\int_X|f+g|^p\,d\mu\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_X|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}+\left(\int_X|g|^p\,d\mu\right)^{1/p}, \tag{1.1.6}$$

δηλαδή

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{1.1.7}$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι απλή στην περίπτωση $p = 1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση $1 < p < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p \, d\mu = \int_X |f+g|^{p-1}|f+g| \, d\mu \\
&\leqslant \int_X |f+g|^{p-1}|f| \, d\mu + \int_X |f+g|^{p-1}|g| \, d\mu \\
&\leqslant \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu\right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu\right)^{1/q} \|g\|_p,
\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $|f+g|^{p-1}, |f|$ και $|f+g|^{p-1}, |g|$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu\right)^{1/q} = \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q} \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big).$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

1.2 Πληρότητα του $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$

Σε αυτήν την παράγραφο δείχνουμε την πληρότητα του $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Θεώρημα 1.2.1. *Ο $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ είναι χώρος Banach.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό κριτήριο. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 1.2.2. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο X με νόρμα. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει αν υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k \to x.$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$.

Λήμμα 1.2.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι πλήρης.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης. Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty$. Για τυχόν $\varepsilon>0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n>m\geqslant n_0$,

$$\|x_{m+1}\|+\cdots+\|x_n\|<\varepsilon.$$

Τότε, αν $n>m\geqslant n_0$,

$$\|s_n-s_m\|=\|x_{m+1}+\cdots+x_n\|\leqslant\|x_{m+1}\|+\cdots+\|x_n\|<\varepsilon.$$

Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι Cauchy. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x\in X$.

Αντίστροφα, έστω (x_k) ακολουθία Cauchy στον X. Για $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$, $k=1,2,\ldots$, μπορούμε να βρούμε $s_1<s_2<\cdots<s_k<\cdots$ ώστε, για κάθε $n>m\geqslant s_k$,

$$\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^k}.$$

Ειδικότερα,

$$s_{k+1}>s_k\geqslant s_k\Longrightarrow\|x_{s_{k+1}}-x_{n_k}\|<\frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{s_{k+1}}-x_{s_k}\|<1<+\infty.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{s_{k+1}}-x_{s_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x\in X$ ώστε

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{s_{k+1}}-x_{s_k})\to x,$$

δηλαδή, $x_{s_{m+1}}-x_{s_1}\to x$. Άρα, $x_{s_k}\to x+x_{s_1}$. Δείξαμε ότι η (x_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει στον X. Έπεται ότι ο X είναι πλήρης. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1. Έστω (f_k) ακολουθία στον $L^p(\mu)$ με την ιδιότητα

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p=M<+\infty.$$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$, $x\in X$. Τότε,

$$\|g_n\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p\leqslant M,$$

δηλαδή $g_n\in L^p(\mu)$ και $\int_X g_n^p d\mu\leqslant M^p$. Η (g_n) είναι αύξουσα, άρα ορίζεται η $g(x)=\lim g_n(x)\in[0,\infty]$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_X g^p d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X g_n^p d\mu\leqslant M^p.$$

Συνεπώς, η g^p είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Από την $g(x) < +\infty$ έχουμε ότι η $s(x) = \lim s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού. Η s είναι μετρήσιμη και από την $|s_n(x)| \leqslant g_n(x) \leqslant g(x)$ συμπεραίνουμε ότι $|s(x)| \leqslant g(x)$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι

$$\int_X |s|^p d\mu \leqslant \int_X g^p d\mu \leqslant M^p < \infty,$$

δηλαδή $s \in L^p(\mu)$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$|s_n(x) - s(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|s_n(x)|^p, |s(x)|^p\} \leqslant 2^p |g(x)|^p$$

σχεδόν παντού. Αφού $|s_n(x) - s(x)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_X |s_n - s|^p d\mu \to 0.$$

Αυτό δείχνει ότι $\|s_n - s\|_p \to 0$. Από το Λήμμα 1.2.3 έπεται ότι ο $L^p(\mu)$ είναι χώρος Banach. □

1.3 Ο χώρος $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$

Στην περίπτωση $p = \infty$, ο χώρος $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ αποτελείται από τις μετρήσιμες f που είναι «φραγμένες σχεδόν παντού». Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 1.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Η κλάση $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{K}$ για τις οποίες υπάρχει $\beta > 0$ ώστε

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}\right) = 0.$$

Για μια τέτοια f, θέτουμε $\|f\|_\infty$ το infimum όλων αυτών των β. Παρατηρήστε ότι το infimum είναι minimum: αν (β_n) είναι μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία με $\beta_n \to \|f\|_\infty$, τότε

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \beta_n\}\right) = 0$$

για κάθε n και $\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x)| > \beta_n\}$, άρα

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}\right) = 0.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος. Αν για κάποια $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ ισχύει $\|f\|_\infty = 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ $\mu-$σχεδόν παντού. Έτσι, για $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, θέτουμε $f \sim g$ αν $f = g$ $\mu-$σχεδόν παντού στο X.

Ορισμός 1.3.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Τότε, το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του χώρου $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ως προς τη σχέση $\sim$ συμβολίζεται με $L^\infty(\mu)$. Ο $L^\infty(\mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος με τις προφανείς πράξεις.

Θα γράφουμε, όπως και πριν, $f \in L^\infty(\mu)$ αντί για $[f] \in L^\infty(\mu)$. Τέλος, για μια $f \in L^\infty(\mu)$ θέτουμε

$$\|f\|_\infty = \min\left\{\beta > 0 : \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}\right)\right\}.$$

Λέμε ότι ο $\|f\|_\infty$ είναι το *ουσιώδες supremum* της f.

Πρόταση 1.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ο χώρος $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ο χώρος με νόρμα $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty\}, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

για τα οποία ισχύει $\mu(X \setminus A_{n,m}) = 0$. Έτσι, αν ορίσουμε $A = \bigcap_{n,m} A_{n,m}$ έχουμε $\mu(X \setminus A) = 0$ και

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, άρα η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στο A και συνεπώς ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Υπάρχει λοιπόν μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{K}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Δηλαδή,

$$\|f_n - f\|_\infty = \|(f_n - f)\chi_A\|_\infty \leqslant \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Αυτό δείχνει ότι $f \in L^\infty(\mu)$ και $f_n \to f$ στον $L^\infty(\mu)$. □

1.4 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και συναρτησοειδή

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. Μια απεικόνιση $T : X \to Y$ λέγεται *γραμμικός τελεστής* αν

$$T(ax_1 + bx_2) = aT(x_1) + bT(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $a, b \in \mathbb{K}$. Η *εικόνα* του T είναι ο υπόχωρος $\mathrm{Im}(T) = \{T(x) : x \in X\}$ και ο *πυρήνας* του T είναι ο υπόχωρος $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$. Ο T είναι *γραμμικός ισομορφισμός* αν είναι ένα προς ένα και επί, δηλαδή αν $\mathrm{Im}(T) = Y$ και $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει $M \geqslant 0$ ώστε

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$$

για κάθε $x \in X$. Από την γραμμικότητα του T και τις ιδιότητες της νόρμας έπεται ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής:

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο T είναι συνεχής απεικόνιση.*

(β) *Ο T είναι συνεχής στο 0.*

(γ) *Ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Αν ο T είναι συνεχής, τότε είναι συνεχής και στο 0.

Υποθέτουμε ότι ο T είναι συνεχής στο 0. Για $\varepsilon = 1 > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

$$\|x\| \leqslant \delta \Longrightarrow \|T(x)\| \leqslant 1.$$

Έστω $x \in X$, $x \neq 0$. Τότε, $\|(\delta/2\|x\|)x\| \leqslant \delta$ άρα $\|T((\delta/2\|x\|)x)\| \leqslant 1$. Δηλαδή,

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$$

για κάθε $x \in X$, όπου $M = 2/\delta$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος και δείχνουμε ότι είναι συνεχής. Υπάρχει $M > 0$ με την ιδιότητα $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/M$. Τότε, αν $\|x - x_0\| < \delta$ έχουμε

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leqslant M\|x - x_0\| \leqslant M\delta = \varepsilon.$$

□

Συμβολίζουμε με $B(X, Y)$ το σύνολο τών φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$. Ο $B(X, Y)$ είναι γραμμικός χώρος.

Ορισμός 1.4.2. Αν $T \in B(X, Y)$ θέτουμε

$$\|T\| = \inf\{M \geqslant 0 : \ \forall x \in X, \ \|T(x)\| \leqslant M\|x\|\}.$$

Αφού ο T είναι φραγμένος, το σύνολο στον ορισμό είναι μη κενό, άρα η $\|T\|$ ορίζεται καλά. Παρατηρούμε επίσης ότι το inf είναι στην πραγματικότητα min. Δηλαδή,

$$\|T(x)\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|, \quad x \in X.$$

Αυτό φαίνεται ως εξής: παίρνουμε φθίνουσα ακολουθία $M_n \to \|T\|$ με την ιδιότητα

$$\|T(x)\| \leqslant M_n\|x\|, \quad x \in X.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\|T(x)\| \leqslant \lim_{n\to\infty} M_n\|x\| = \|T\| \cdot \|x\|.$$

Πρόταση 1.4.3. *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε,*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leqslant 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε μόνο την πρώτη ισότητα. Έστω $A = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$. Αν $\|x\| \leqslant 1$, τότε $\|T(x)\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\| \leqslant \|T\|$. Άρα, $A \leqslant \|T\|$.

Αντίστροφα, αν $x \neq 0$ τότε $\|(x/\|x\|)\| \leqslant 1$ άρα

$$\|T(x/\|x\|)\| \leqslant A \Longrightarrow \|T(x)\| \leqslant A\|x\|.$$

Από τον ορισμό της $\|T\|$ παίρνουμε $\|T\| \leqslant A$. □

Πρόταση 1.4.4. *Η απεικόνιση $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}^+$ με $T \mapsto \|T\|$ είναι νόρμα, και αν ο Y είναι χώρος Banach τότε ο $B(X,Y)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Δείχνουμε μόνο την πληρότητα. Έστω (T_n) ακολουθία Cauchy στον $B(X,Y)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon$ αν $n, m \geqslant n_0$.

Τότε, αν $x \in X$ και $n, m \geqslant n_0$, έχουμε $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. Αυτό δείχνει ότι η $(T_n(x))$ είναι Cauchy στον Y και αφού ο Y είναι πλήρης υπάρχει $y_x \in Y$ με $T_n(x) \to y_x$.

Ορίζουμε $T : X \to Y$ με $T(x) = y_x = \lim_n T_n(x)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Θα δείξουμε ταυτόχρονα ότι $T \in B(X,Y)$ και $\|T - T_n\| \to 0$. Για κάθε $x \in X$ και $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}\|T(x) - T_n(x)\| &= \|\lim_n (T_m(x) - T_n(x))\| = \lim_n \|T_m(x) - T_n(x)\| \\ &\leqslant \limsup_n \|T_m - T_n\| \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon\|x\|.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $(T - T_n) \in B(X,Y)$, άρα $T = (T - T_n) + T_n \in B(X,Y)$. Επίσης, $\|T - T_n\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$, και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\|T - T_n\| \to 0$. □

Ορισμός 1.4.5. Κάθε γραμμικός τελεστής $f : X \to \mathbb{K}$ λέγεται *γραμμικό συναρτησοειδές*. Ο χώρος $B(X, \mathbb{K})$ όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $f : X \to \mathbb{K}$ λέγεται *δυϊκός χώρος* του X και συμβολίζεται με X^*.

Αφού ο $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, ο δυϊκός χώρος X^* κάθε χώρου X με νόρμα είναι χώρος Banach, όπου

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}.$$

Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (δηλ. ένα προς ένα και επί) και οι T, T^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ ώστε

$$\frac{1}{M_2}\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant M_1\|x\|, \quad x \in X.$$

Λέμε ότι δύο χώροι με νόρμα X και Y είναι *ισόμορφοι* αν υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$. Οι X και Y λέγονται *ισομετρικά ισόμορφοι* αν υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ με την επιπλέον ιδιότητα

$$\|T(x)\| = \|x\|, \quad x \in X.$$

Ένας τέτοιος ισομορφισμός λέγεται *ισομετρία*. Παρατηρήστε ότι κάθε ισομετρία διατηρεί τις αποστάσεις: αν $x_1, x_2 \in X$, τότε $\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$. Επομένως, δύο ισομετρικά ισόμορφοι χώροι «ταυτίζονται» τόσο σαν γραμμικοί όσο και σαν μετρικοί χώροι.

1.5 Χώροι Hilbert και ο $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και χώροι Hilbert

Ορισμός 1.5.1. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.

(β) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, για κάθε $x, y \in X$.

(γ) για κάθε $y \in X$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y \rangle$ είναι γραμμική.

Πρόταση 1.5.2 (ανισότητα Cauchy-Schwarz)**.** *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Έστω $x, y \in X$ και έστω $M = |\langle x, y \rangle|$. Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $\langle x, y \rangle = Me^{i\theta}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \overline{\lambda \langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda \langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \\ &= r^2 \langle x, x \rangle + 2\mathrm{Re}(rMe^{i(\theta+t)}) + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το t έτσι ώστε $e^{i(\theta+t)} = -1$. Τότε, έχουμε

$$r^2 \langle x, x \rangle - 2rM + \langle y, y \rangle \geqslant 0$$

για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας $r = \sqrt{\langle y, y \rangle}/\sqrt{\langle x, x \rangle}$ έχουμε το ζητούμενο (η περίπτωση $x = 0$ ή $y = 0$ είναι προφανής).

Στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leqslant \langle tx + y, tx + y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς t πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν. Άρα, $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leqslant 0$. Αυτό δίνει το ζητούμενο. □

Ορίζουμε $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\| \cdot \|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 1.5.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες είναι απλές). Όμως,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Παρατήρηση 1.5.4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται εύκολα ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$: Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leqslant |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Άρα,

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Ειδικότερα, για κάθε $y \in X$ η απεικόνιση $x \mapsto \langle x, y\rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X.

Ορισμός 1.5.5. Ένας χώρος Banach λέγεται *χώρος Hilbert* αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον X ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ για κάθε $x \in X$.

Στη συνέχεια συμβολίζουμε τους χώρους Hilbert με H. Κάθε χώρος Hilbert ικανοποιεί τον *κανόνα του παραλληλογράμμου*: για κάθε $x, y \in H$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Αντίστροφα, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός χώρου Banach X ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται από την

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, και από την

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Καθετότητα

Ορισμός 1.5.6 (καθετότητα). *Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Λέμε ότι τα $x, y \in X$ είναι ορθογώνια (ή κάθετα) και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y\rangle = 0$. Αν $x \in X$ και M είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, λέμε ότι το x είναι κάθετο στο M και γράφουμε $x \perp M$ αν $x \perp y$ για κάθε $y \in M$.*

Παρατηρήσεις 1.5.7. (α) Το 0 είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα.

(β) Αν $x \perp y$, ισχύει το *Πυθαγόρειο θεώρημα*: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ορισμός 1.5.8. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω M γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε

$$M^{\perp} = \{x \in X : \forall y \in M, \ \ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Ο $M^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X

Πρόταση 1.5.9. *Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ ώστε*

$$\|x - y_0\| = \mathrm{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, ονομάζεται προβολή του x στον M και ικανοποιεί την $x - P_M(x) \perp M$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\delta = \mathrm{dist}(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M ώστε

$$\|x - y_n\| \to \delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2.
\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geqslant \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

όταν $m, n \to \infty$. Άρα, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός) και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2 \\
&\leqslant 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό θέτουμε $w = x - P_M(x)$. Έστω ότι το w δεν είναι κάθετο στον M. Τότε, υπάρχει $z \in M$ ώστε $\langle w, z\rangle > 0$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, έχουμε $2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2 > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\|x - (P_M(x) + \varepsilon z)\|^2 &= \|w - \varepsilon z\|^2 = \langle w - \varepsilon z, w - \varepsilon z\rangle \\
&= \|w\|^2 - 2\varepsilon\langle w, z\rangle + \varepsilon\|z\|^2 \\
&= \delta^2 - \varepsilon(2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2) < \delta^2,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $P_M(x) + \varepsilon z \in M$. □

Πόρισμα 1.5.10. *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, ώστε $z \perp M$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H \setminus M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

Συναρτησοειδή σε χώρους Hilbert

Έστω $H \neq \{0\}$ χώρος Hilbert. Θα δούμε ότι ο H^* περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή, τα οποία αναπαρίστανται με πολύ συγκεκριμένο τρόπο από τα στοιχεία του H.

Λήμμα 1.5.11. *Για κάθε $a \in H$, η $f_a : H \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \langle x, a \rangle$ ανήκει στον H^*, και $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$f_a(\lambda x + \mu y) = \langle \lambda x + \mu y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \mu \langle y, a \rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_a(y),$$

και

$$|f_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leqslant \|a\| \, \|x\|.$$

Άρα, $f_a \in H^*$ και $\|f_a\| \leqslant \|a\|$. Τέλος, αν $a \neq 0$,

$$\|f_a\| \geqslant \frac{|f_a(a)|}{\|a\|} = \frac{|\langle a, a \rangle|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Αν $a = 0$, προφανώς $\|f_a\| = 0$ ($f_a \equiv 0$). □

Αντίστροφα, κάθε $f \in H^*$ αναπαρίσταται στη μορφή $f = f_a$ για κάποιο $a \in H$:

Θεώρημα 1.5.12 (θεώρημα αναπαράστασης του Riesz)**.** *Έστω H χώρος Hilbert, και $f \in H^*$. Υπάρχει μοναδικό $a \in H$ ώστε $f = f_a$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $M = \mathrm{Ker} f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Ο M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Αν $M = H$, τότε $f \equiv 0$ και $f = f_0$.

Αν $M \neq H$, τότε υπάρχει $z \neq 0$, $z \in H$ που είναι κάθετο στον M. Τότε, για κάθε $y \in H$ έχουμε

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0.$$

Άρα $f(z)y - f(y)z \in M$, και αφού $z \perp M$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \langle f(z)y - f(y)z, z \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(z)\langle y, z \rangle = f(y)\langle z, z \rangle \\ &\Longrightarrow \quad f(y) = \left\langle y, \frac{\overline{f(z)}z}{\|z\|^2} \right\rangle = f_a(y), \end{aligned}$$

όπου $a = \overline{f(z)}z/\|z\|^2$. Η μοναδικότητα του a είναι απλή. Αν $f(y) = \langle y, a \rangle = \langle y, a' \rangle$ για κάθε $y \in H$, τότε $a - a' \perp y$ για κάθε $y \in H$. Άρα, $a = a'$. □

Πόρισμα 1.5.13. *Έστω H χώρος Hilbert. Η απεικόνιση $T : H \to H^*$ με $T(a) = f_a$ είναι αντιγραμμική ισομετρία και επί.*

Σημείωση. Λέγοντας ότι η T είναι *αντιγραμμική*, εννοούμε ότι $T(\lambda a + \mu a') = \overline{\lambda} T(a) + \overline{\mu} T(a')$ για κάθε $a, a' \in H$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη. (α) Για την αντιγραμμικότητα της T, παρατηρούμε ότι

$$f_{\lambda a+\mu a'}(x) = \langle x, \lambda a + \mu a' \rangle = \overline{\lambda}\langle x, a\rangle + \overline{\mu}\langle x, a'\rangle = \overline{\lambda} f_a(x) + \overline{\mu} f_{a'}(x),$$

άρα

$$T(\lambda a + \mu a') = f_{\lambda a+\mu a'} = \overline{\lambda} f_a + \overline{\mu} f_{a'} = \overline{\lambda} T(a) + \overline{\mu} T(a').$$

(β) Από το Λήμμα 1.5.11 έχουμε $\|T(a)\| = \|f_a\| = \|a\|$. Δηλαδή, η T είναι ισομετρία.
(γ) Αν $f \in H^*$, υπάρχει $a \in H$ ώστε $T(a) = f_a = f$, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Δηλαδή, η T είναι επί. $\square$

Θεώρημα 1.5.14. *Έστω M κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H και έστω $f \in M^*$. Υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^*$ ώστε $\tilde{f}|_M = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{M^*}$.*

Απόδειξη. Ο M είναι χώρος Hilbert, άρα το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μας δίνει μοναδικό $w \in M$ ώστε

$$f(x) = \langle x, w\rangle, \quad x \in M.$$

Αφού (προφανώς) $w \in H$, μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{f} : H \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x) = \langle x, w\rangle, \quad x \in H.$$

Τότε, το $\tilde{f}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H, επεκτείνει το f, και

$$\|f\|_{M^*} = \|w\| = \|\tilde{f}\|_{H^*}.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω ότι κάποιο $g \in H^*$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον H, υπάρχει $u \in H$ ώστε

$$g(x) = \langle x, u\rangle, \quad x \in H.$$

Όμως τότε, $\langle x, w - u\rangle = 0$ για κάθε $x \in M$, οπότε $w - u = z \in M^{\perp}$. Τότε,

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα, και αφού $\|u\| = \|g\| = \|f\| = \|\tilde{f}\| = \|w\|$, πρέπει να έχουμε $\|z\| = 0$, το οποίο δίνει $z = 0 \Longrightarrow w = u$. Έπεται ότι $g = \tilde{f}$. $\square$

Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός 1.5.15. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία $(e_k)\subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ (1 αν $i=j$ και 0 αν $i\neq j$). Αν (e_k) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον X, τότε το $\{e_k : k\in\mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}=0$, τότε για κάθε $j=1,\dots,n$ έχουμε

$$0=\Big\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j}\Big\rangle=\sum_{k=1}^n \lambda_k\langle e_{i_k},e_{i_j}\rangle=\lambda_j.$$

Ορισμός 1.5.16. Έστω H χώρος Hilbert. Μιά ορθοκανονική ακολουθία (e_k) λέγεται *ορθοκανονική βάση* του H αν

$$H=\overline{\mathrm{span}}\{e_k : k\in\mathbb{N}\}.$$

Πρόταση 1.5.17. *Έστω H ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k\in\mathbb{N}\}$ του H.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i\in I\}$ του H είναι αριθμήσιμο σύνολο: πράγματι, αν $e_i\neq e_j$ είναι στοιχεία μιας τέτοιας οικογένειας, τότε $\|e_i-e_j\|=\sqrt{2}$. Την ίδια στιγμή, αφού ο χώρος είναι διαχωρίσιμος δεν γίνεται να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του που να απέχουν ανά δύο απόσταση ίση με $\sqrt{2}$. Θεωρούμε λοιπόν μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_k : k\in\mathbb{N}\}$ του H (η διάταξη των στοιχείων της βάσης είναι τυχούσα) η οποία να είναι μεγιστική, δηλαδή να μην περιέχεται γνήσια σε κάποια άλλη. Αυτό γίνεται με χρήση του λήμματος του Zorn. Τότε, ο υπόχωρος $\mathrm{span}\{e_k : k\in\mathbb{N}\}$ είναι πυκνός στον H (αλλιώς, θα μπορούσαμε να βρούμε μοναδιαίο $z\perp e_k$ για κάθε k, και η (e_k) δεν θα ήταν μεγιστική). Άρα, η (e_k) είναι ορθοκανονική βάση του H. □

Λήμμα 1.5.18. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω (e_n) ορθοκανονική ακολουθία στον X. Για κάθε $x\in H$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$,*

$$d(x,\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_n\})=\Big\|x-\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k\Big\|.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ και $y=\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k$. Παρατηρούμε ότι

$$\Big\|x-\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k\Big\|^2=\|x\|^2+\sum_{k=1}^n|\lambda_k-\langle x,e_k\rangle|^2-\sum_{k=1}^n|\langle x,e_k\rangle|^2.$$

Άρα,

$$\Big\|x-\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k\Big\|^2\geqslant\|x\|^2-\sum_{k=1}^n|\langle x,e_k\rangle|^2$$

και ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_k=\langle x,e_k\rangle$, $k=1,\dots,n$, δηλαδή αν $y=\sum_{k=1}^n\langle x,e_k\rangle e_k$. □

Το επόμενο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του ότι η (e_n) είναι ορθοκανονική βάση.

Θεώρημα 1.5.19. *Έστω (e_k) ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η (e_k) είναι ορθοκανονική βάση του H.*

(β) *Αν $x \in H$ και $\langle x, e_k\rangle = 0$ για κάθε k, τότε $x = 0$.*

(γ) *Αν $x \in H$ και $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$, τότε $s_n(x) \to x$. Δηλαδή,*

$$x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k.$$

(δ) *Ισχύει η ισότητα του Parseval: για κάθε $x \in H$,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $x \in H$. Αφού ο $F = \mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to x$. Από την υπόθεση έχουμε $x \perp y$ για κάθε $y \in F$. Τότε, $0 = \langle x, y_n\rangle \to \langle x, x\rangle$. Άρα, $\langle x, x\rangle = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $x = 0$.

(β) $\Longrightarrow$ (γ) Παρατηρούμε πρώτα ότι $x - s_n(x) \perp s_n(x)$: πράγματι,

$$\langle x, s_n(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|s_n(x)\|^2 = \langle s_n(x), s_n(x)\rangle.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε

$$\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \|s_n(x)\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

Συνεπώς. $\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ για κάθε n, και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε την ανισότητα Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Ειδικότερα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ συγκλίνει, και από την

$$\|s_m(x) - s_n(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

η οποία ισχύει για κάθε $m > n$, έπεται ότι η $\{s_n(x)\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο H είναι πλήρης, υπάρχει $y \in H$ ώστε $s_n(x) \to y$. Από την σύγκλιση αυτή βλέπουμε ότι $\langle x - y, e_k]rangle =$ 0 για κάθε k, και η υπόθεσή μας (το (β)) εξασφαλίζει ότι

$$x = y = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

(γ) $\Longrightarrow$ (δ) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2$ για κάθε n. Αφού $\|x - s_n(x)\| \to 0$, έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

(δ) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2$ για κάθε n. Αφού $\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2 \to \|x\|^2$, έπεται ότι $\|x - s_n(x)\| \to 0$. Δηλαδή, $s_n(x) \to x$. Αφού κάθε $s_n(x) \in \mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, έπεται ότι

$$H = \overline{\mathrm{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Δηλαδή, η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H. □

Θεώρημα 1.5.20 (Riesz-Fisher). *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2.*

Απόδειξη. Ο H έχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $T : H \to \ell_2$ με

$$T(x) = (\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_k\rangle, \dots).$$

(α) Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2 < +\infty$, άρα $T(x) \in \ell_2$.
(β) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.
(γ) $\|T(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$, άρα ο T είναι ισομετρία (ειδικότερα, είναι ένα προς ένα).
(δ) Έστω $(a_1, \dots, a_k, \dots) \in \ell_2$. Ορίζουμε $x_N = \sum_{k=1}^N a_k e_k$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{k=M+1}^{N} a_k^2 \to 0$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (x_N) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in H$ ώστε $x_N \to x$.

Έχουμε $\langle x_N, e_m\rangle \to \langle x, e_m\rangle$ καθώς $N \to \infty$, και αν $N > m$,

$$\langle x_N, e_m\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_m\rangle = a_m.$$

Άρα, $\langle x, e_m\rangle = a_m$, $m \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$T(x) = (\langle x, e_m\rangle)_{m\in\mathbb{N}} = (a_m)_{m\in\mathbb{N}},$$

άρα ο T είναι επί. □

Ορθομοναδιαίοι τελεστές

Έστω H_1 και H_2 δύο χώροι Hilbert. Ένας γραμμικός τελεστής $U : H_1 \to H_2$ λέγεται ορθομοναδιαίος αν είναι 1-1 και επί, και ικανοποιεί την

$$\|Ux\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$$

για κάθε $x \in H_1$. Παρατηρήστε ότι τότε ο $U^{-1} : H_2 \to H_1$ ορίζεται καλά και είναι επίσης ορθομοναδιαίος. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $x, y \in H_1$ ισχύει

$$\langle Ux, Uy \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1}.$$

Αυτό προκύπτει, για παράδειγμα, από την

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{t} \left[\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u=iv\|^2 \right]$$

η οποία ισχύει σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Συνέπεια των αοτελεσμάτων της προηγούμενης υποπαραγράφου είναι ότι οποιοιδήποτε δύο απειροδιάστατοι διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert H_1 και H_2 είναι *ορθομοναδιαία ισοδύναμοι*: αν $\{e_k\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H_1 και $\{v_k\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H_2 τότε η απεικόνιση $U : H_1 \to H_2$ με

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \mapsto Ux = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle v_k$$

είναι ορθομοναδιαίος τελεστής. Ειδική περίπτωση είναι το Θεώρημα 1.5.20: κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον ℓ_2.

Συζυγής τελεστής

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια εφαρμογή του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz.

Θεώρημα 1.5.21. *Έστω H χώρος Hilbert και έστω $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Υπάρχει μοναδικός φραγμένος γραμμικός τελεστής $T^* : H \to H$ με την ιδιότητα: για κάθε $x, y \in H$,*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle. \tag{1.5.1}$$

Ο T^* ονομάζεται συζυγής τελεστής του T. Ικανοποιεί επίσης τις $\|T\| = \|T^*\|$ και $(T^*)^* = T$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $y \in H$ το γραμμικό (ελέγξτε το) συναρτησοειδές ℓ_y που ορίζεται από την

$$\ell_y(x) = \langle Tx, y \rangle$$

είναι φραγμένο. Πράγματι,

$$|\ell_y(x)| \leqslant \|Tx\|\, \|y\| \leqslant (\|T\|\, \|y\|)\, \|x\|$$

για κάθε $x \in H$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδικό $a_y \in H$ ώστε

$$\langle Tx, y\rangle - \ell_y(x) = \langle x, a_y\rangle$$

για κάθε $x \in H$. Ορίζουμε $T^* : H \to H$ με $T^*(y) = a_y$. Τότε, η (1.5.1) ικανοποιείται αυτομάτως. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ελέγχουμε άμεσα ότι ο T^* είναι όντως γραμμικός τελεστής. Τέλος,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}\\ &= \sup\{|\langle x, T^*y\rangle| : \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}\\ &= \|T^*\|.\end{aligned}$$

Για την $(T^*)^* = T$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι «$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$» αν και μόνο αν «$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ για κάθε $x, y \in H$», κάτι που προκύπτει αν πάρουμε συζυγείς στην πρώτη ισότητα και αντιστρέψουμε τους ρόλους των x και y. □

1.6 Ο δυϊκός του L^p

Έστω $p, q > 1$ συζυγείς εκθέτες. Για κάθε $g \in L^q(\mu)$, η απεικόνιση $\phi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{K}$ με

$$\phi_g(f) = \int_X fg d\mu$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές διότι

$$|\phi_g(f)| = \left|\int_X fg\, d\mu\right| \leqslant \|g\|_q \|f\|_p$$

από την ανισότητα Hölder. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι $\|\phi_g\| \leqslant \|g\|_q$.

Ορίζουμε $T : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$ με $T(g) = \phi_g$. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $1 < p < \infty$. Ο δυϊκός χώρος του $L^p(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(\mu)$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $\mu(X) < \infty$ (η επέκταση αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, δεν παρουσιάζει δυσκολίες). Θεωρούμε τον τελεστή $T : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$ με $T(g) = \phi_g$. Από την συζήτηση στην αρχή της παραγράφου προκύπτει εύκολα ότι ο T είναι καλά ορισμένος φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι ισομετρία. Έστω $g \in L^q(\mu)$, $g \neq 0$. Ορίζουμε f με $f(x) = |g(x)|^{q-1}\mathrm{sign}(g(x))$. Τότε, $f \in L^p(\mu)$ και

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |g|^q d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\|T(g)\| = \|\phi_g\| \geqslant \frac{|\phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $\phi : L^p(\mu) \to \mathbb{K}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ με

$$\nu(A) = \phi(\chi_A).$$

Η ν ορίζεται καλά γιατί $\chi_A \in L^p(\mu)$ (αφού $\mu(X) < \infty$). Επίσης, η ν είναι μέτρο: από την γραμμικότητα του ϕ έπεται ότι η ν είναι πεπερασμένα προσθετική, και αν (A_n) είναι μία φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ με $\bigcap_n A_n = \emptyset$, τότε

$$|\nu(A_n)| \leqslant \|\phi\| \cdot \|\chi_{A_n}\|_p = \|\phi\| \left(\mu(A_n)\right)^{1/p} \to 0.$$

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$, δηλαδή το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ. Από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση g ώστε

$$\phi(\chi_A) = \nu(A) = \int_A g d\mu = \int_X \chi_A g d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\phi(f) = \int_X f g d\mu$$

για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση f. Θα δείξουμε ότι $g \in L^q(\mu)$. Θεωρούμε μια ακολουθία από απλές μετρήσιμες συναρτήσεις h_k με $0 \leqslant h_k \nearrow |g|^q$ και θέτουμε $g_k = h_k^{1/p}\mathrm{sign}(g)$. Τότε, $\|g_k\|_p^p = \|h_k\|_1$ και

$$\left|\int_X g_k g\right| = |\phi(g_k)| \leqslant \|\phi\| \cdot \|g_k\|_p,$$

άρα

$$\left|\int_X g_k g d\mu\right| \leqslant \|\phi\| \cdot \|h_k\|_1^{1/p}.$$

Από την άλλη πλευρά, $g_k g = h_k^{1/p}|g| \geqslant h_k^{1/p} h_k^{1/q} = h_k$. Άρα,

$$\|h_k\|_1 \leqslant \left|\int_X g_k g d\mu\right| \leqslant \|\phi\| \cdot \|h_k\|_1^{1/p},$$

το οποίο δίνει $\|h_k\|_1 \leqslant \|\phi\|^q$. Παίρνοντας $k \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, βλέπουμε ότι

$$\int_X |g|^q d\mu = \lim_k \int_X h_k d\mu \leqslant \|\phi\|^q.$$

Αυτό δείχνει ότι $g \in L^q(\mu)$. Τώρα, τα ϕ_g και ϕ συμφωνούν στις απλές συναρτήσεις οι οποίες είναι πυκνές στον $L^p(\mu)$. Λόγω συνέχειας, $T(g) = \phi_g \equiv \phi$, δηλαδή ο T είναι ισομετρία επί. $\square$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.6.1 χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα Radon–Nikodym. Παρακάτω δίνουμε μια απόδειξη αυτού του θεωρήματος, που χρησιμοποιεί την θεωρία των χώρων Hilbert (το επιχείρημα είναι του von Neumann).

Θεώρημα 1.6.2 (Radon–Nikodym). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ. Τότε, υπάρχει μοναδική $h \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ώστε $\nu(A) = \int_A h\, d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που το μ είναι πεπερασμένο και το ν είναι μη αρνητικό (από αυτή την ειδική περίπτωση παίρνουμε το γενικό συμπέρασμα με βασικά επιχειρήματα της θεωρίας μέτρου).

Θεωρούμε το μέτρο $\lambda = \mu + \nu$ στον $(X, \mathcal{A})$. Από τις υποθέσεις μας, το λ είναι μη αρνητικό, πεπερασμένο μέτρο. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $L^2(X, \mathcal{A}, \lambda)$ και ορίζουμε $\phi : L^2(X, \mathcal{A}, \lambda) \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(f) = \int_X f\, d\nu.$$

Το ϕ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^2(X, \mathcal{A}, \lambda)$ και

$$|\phi(f)| \leqslant \int_X |f|\, d\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(X)} \left(\int_X f^2 d\lambda \right)^{1/2} = \sqrt{\lambda(X)}\, \|f\|_2,$$

δηλαδή το ϕ είναι φραγμένο. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $g \in L^2(X, \mathcal{A}, \lambda)$ με την ιδιότητα

$$\phi(g) = \int_X fg\, d\lambda,$$

δηλαδή,

$$\int_X f\, d\nu = \int_X fg\, d\lambda$$

για κάθε $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \lambda)$.

Δείχνουμε πρώτα ότι $0 \leqslant g \leqslant 1$ σχεδόν παντού ως προς λ. Πράγματι, αν $A_n = \{x \in X : g(x) \geqslant 1 + 1/n\}$ τότε, θεωρώντας την $f = \chi_{A_n}$ βλέπουμε ότι

$$\lambda(A_n) \geqslant \nu(A_n) \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lambda(A_n),$$

άρα $\lambda(A_n) = 0$. Αφού $A := \{x : g(x) > 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, έπεται ότι $\lambda(A) = 0$. Με ανάλογο τρόπο, αν $B_n = \{x \in X : g(x) \leqslant -1/n\}$ τότε, θεωρώντας την $f = \chi_{B_n}$ βλέπουμε ότι

$$0 \leqslant \nu(B_n) \leqslant -\frac{1}{n} \lambda(B_n),$$

άρα $\lambda(B_n) = 0$. Αφού $B := \{x : g(x) < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, έπεται ότι $\lambda(B) = 0$.

Από την $\lambda = \mu + \nu$ μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$\int_X f(1-g)\, d\nu = \int_X fg\, d\mu \tag{1.6.1}$$

για κάθε $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \lambda)$, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι g και $1-g$ είναι μη αρνητικές *παντού* στο X. Θέτοντας $C = \{x : g(x) = 1\}$ και θεωρώντας την $f = \chi_C$, βλέπουμε ότι $\mu(C) = 0$. Αφού το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ, έπεται ότι $\nu(C) = 0$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $0 \leqslant g < 1$ *παντού* στο X.

Έστω $A \in \mathcal{A}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $f_n = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_A$ και από την (1.6.1) έχουμε

$$\int_A (1 - g^{n+1})\, d\nu = \int_A g \frac{1 - g^{n+1}}{1 - g}\, d\mu.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\nu(A) = \int_A d\nu = \int_A \frac{g}{1-g}\, d\mu.$$

Το $A \in \mathcal{A}$ ήταν τυχόν, οπότε θέτοντας $h = \frac{g}{1-g}$ έχουμε το ζητούμενο (ελέγξτε την ολοκληρωσιμότητα και τη μοναδικότητα της h). $\square$

1.7 Προσέγγιση συναρτήσεων στον L^p

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε δύο βασικά αποτελέσματα προσέγγισης των συναρτήσεων που ανήκουν σε χώρους L^p.

Θεώρημα 1.7.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{S}$ που αποτελείται από όλες τις απλές συναρτήσεις $s : X \to \mathbb{K}$ για τις οποίες ισχύει*

$$\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty. \tag{1.7.1}$$

Η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή στον $L^p(\mu)$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $s \in \mathcal{S}$ είναι μια απλή συνάρτηση με κανονική μορφή

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

όπου τα $A_j \in \mathcal{A}$ είναι ξένα και αν $a_j \neq 0$ τότε $\mu(A_j) < \infty$, έχουμε

$$\int_X |s|^p \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \mu(A_j) < \infty.$$

Δηλαδή $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mu)$.

Έστω $f \in L^p(\mu)$, $f \geqslant 0$. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{s_n\}$ με $0 \leqslant s_n \leqslant f$ και $s_n \nearrow f$. Αφού $0 \leqslant s_n \leqslant f$, έχουμε $s_n \in L^p(\mu)$ για κάθε n, άρα $s_n \in \mathcal{S}$ (άσκηση). Επιπλέον, $|f - s_n|^p \leqslant f^p$ και αφού $f \in L^p(\mu)$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δίνει ότι

$$\int_X |s_n - f|^p \, d\mu \to 0,$$

δηλαδή ότι $\|s_n - f\|_p \to 0$. Άρα, οι θετικές συναρτήσεις στον $L^p(\mu)$ προσεγγίζονται από απλές ως προς την $\|\cdot\|_p$. Η γενική περίπτωση συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{K}$ έπεται από αυτήν με τις συνήθεις τεχνικές. $\square$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση Borel μετρήσιμων συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιο μετρικό χώρο (X, d). Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό:

Ορισμός 1.7.2 (φορέας)**.** *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και έστω $f : X \to \mathbb{K}$. Το κλειστό σύνολο*

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \tag{1.7.2}$$

λέγεται φορέας της f.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $C_c(X)$ του χώρου $C(X)$ των συνεχών συναρτήσεων στο X που αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{K}$ που έχουν συμπαγή φορέα, δηλαδή μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές σύνολο $K = K(f) \subseteq X$. Για «πολλούς» μετρικούς χώρους, οι συναρτήσεις στον $L^p(\mu)$, όπου $1 \leqslant p < \infty$, προσεγγίζονται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Για λόγους απλότητας, θα αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα μόνο στην περίπτωση $X = \mathbb{R}^n$. Θα χρειαστούμε το θεώρημα Tietze.

Θεώρημα 1.7.3 (Θεώρημα Tietze)**.** *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος, έστω $F \subseteq X$ κλειστό και έστω $f : F \to \mathbb{K}$ συνεχής. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to \mathbb{K}$ που επεκτείνει την f, δηλαδή $g|_F = f$, και επιπλέον ικανοποιεί την $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

Θεώρημα 1.7.4. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Το σύνολο $C_c(\mathbb{R}^n)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα του $\mathbb{R}^n$ είναι πυκνό στον $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Λογω του Θεωρήματος 1.7.1, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απλή συνάρτηση $s \in \mathcal{S}$, που επιπλέον έχει συμπαγή φορέα (άσκηση), προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Έστω $\varepsilon > 0$ και $s \in \mathcal{S}$ με συμπαγή φορέα. Από το Θεώρημα Luzin, αν $A = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) \neq 0\}$, τότε υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ με $\mu(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε η $s|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής. Χρησιμοποιώντας την εξωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, βρίσκουμε φραγμένο ανοικτό σύνολο $U_\varepsilon \supseteq A$ με $\mu(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$. Τότε, το $E = F_\varepsilon \cup (\mathbb{R}^n \setminus U_\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο και η $s|_E$ είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί). Από το Θεώρημα Tietze, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$g|_{F_\varepsilon} = s, \quad g|_{\mathbb{R}^n \setminus U_\varepsilon} = 0 = s \;\text{ και }\; \|g\|_\infty \leqslant \|s\|_\infty.$$

Συνεπώς $\mu(\{x : s(x) \neq g(x)\}) = \mu(U_\varepsilon \setminus A) + \mu(A \setminus F_\varepsilon) < 2\varepsilon$. Έπεται ότι

$$\|s-g\|_p^p = \int_{\{x : s(x) \neq g(x)\}} |s-g|^p \, dx \leqslant 2^p \|s\|_\infty^p \mu(\{x : s(x) \neq g(x)\})$$

άρα

$$\|s-g\|_p \leqslant 2\|s\|_\infty 2^{1/p} \varepsilon^{1/p} = C\varepsilon^{1/p},$$

όπου η σταθερά C είναι ανεξάρτητη από το ε. Από την κατασκευή, η g έχει συμπαγή φορέα. Άρα, ο $C_c(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

1.8 Συνέλιξη

Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ με

$$\phi(x,y) = f(x-y)g(y), \tag{1.8.1}$$

η οποία είναι μετρήσιμη. Ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R}^{2n})$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x,y)|\ dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\ dx = |g(y)|\|f\|_1$$

από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue στις μεταθέσεις. Επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x,y)|\ dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\|f\|_1\ dy = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.$$

Από το Θεώρημα Tonelli έπεται ότι $\phi \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ και από από το Θεώρημα Fubini έχουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy$$

ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και επιπλέον (αν θέσουμε την τιμή του ίση με μηδέν εκεί που δεν ορίζεται) σαν συνάρτηση του x ορίζει ένα στοιχείο του $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ορισμός 1.8.1 (συνέλιξη)**.** Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, η συνάρτηση $f*g$ που ορίζεται σχεδόν παντού από την

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy \tag{1.8.2}$$

ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ και λέγεται *συνέλιξη* των f και g.

Οι επόμενες προτάσεις περιγράφουν κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης.

Πρόταση 1.8.2. *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε*

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1. \tag{1.8.3}$$

Επιπλέον, η απεικόνιση $(f,g) \mapsto f*g$ είναι συνεχής (ως προς την $\|\cdot\|_1$).

Απόδειξη. Για τη συνάρτηση $\phi(x,y) = f(x-y)g(y)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy \right| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x,y)|\ dx \right) dy \\ &= \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

Για τη συνέχεια της $f*g$ θα δείξουμε ότι αν οι $f_k, f, g_k, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιούν τις $\|f_k - f\|_1 \to 0$ και $\|g_k - g\|_1 \to 0$, τότε $\|f_k * g_k - f*g\|_1 \to 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\|f_k * g_k - f*g\|_1 &= \|f_k*(g_k-g) + (f_k-f)*g\|_1 \leqslant\leqslant \|f_k*(g_k-g)\|_1 + \|(f_k-f)*g\|_1 \\ &\leqslant \|f_k\|_1\|g_k-g\|_1 + \|f_k-f\|_1\|g\|_1 \to 0,\end{aligned}$$

αν συνδυάσουμε τις υποθέσεις με το γεγονός ότι $\sup_k \|f_k\|_1 < \infty$ (αφού η (f_k) είναι συγκλίνουσα στον $L^1(\mathbb{R}^n)$). $\square$

Πρόταση 1.8.3. *Έστω $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Η συνέλιξη έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Είναι διγραμμική, δηλαδή*

$$(f+g)*h = f*h + g*h \quad \textit{και} \quad f*(g+h) = f*g + f*h. \tag{1.8.4}$$

(ii) *Είναι μεταθετική, δηλαδή*

$$f*g = g*f. \tag{1.8.5}$$

(iii) *Είναι προσεταιριστική, δηλαδή*

$$(f*g)*h = f*(g*h). \tag{1.8.6}$$

Απόδειξη. Το (α) είναι άμεσο. Λόγω της συνέχειας της $(f,g) \mapsto f*g$, για να αποδείξουμε τα (β) και (γ) σε πλήρη γενικότητα αρκεί να τα αποδείξουμε για τις συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, λόγω του Θεωρήματος 1.7.4.

(β) Για τη μεταθετικότητα, γράφουμε

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz = (g*f)(x),$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $z = x - y$.

(γ) Για την προσεταιριστικότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\big(f*(g*h)\big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(g*h)(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y-z)h(z)\,dz\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y-z)\,dy\right)h(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z-u)g(u)\,du\right)h(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x-z)h(z)\,dz \\
&= \big((f*g)*h\big)(x),
\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u = y - z$. □

Κεφάλαιο 2

Παραγώγιση και Ολοκλήρωση

2.1 Εισαγωγή

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f:

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Γνωρίζουμε ότι αν $x \in [a, b]$ και η f είναι συνεχής στο x τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x και $F'(x) = f(x)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, η F είναι παραγωγίσιμη στο x αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

το οποίο, στην περίπτωσή μας, παίρνει την μορφή

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy = \lim_{|I|\to 0} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy$$

αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $I = (x, x+h)$ και γράψουμε $|I|$ για το μήκος του διαστήματος I. Θα αλλάξουμε λίγο το πλαίσιο, θεωρώντας το όριο

$$\lim_{\substack{|I|\to 0 \\ x\in I}} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy,$$

όπου, πλέον, θεωρούμε όλα τα ανοικτά διαστήματα I τα οποία περιέχουν το x και αφήνουμε το μήκος τους να πάει στο μηδέν. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $\frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy$ είναι η μέση τιμή της f στο διάστημα I. Πάλι, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε

$$\lim_{\substack{|I|\to 0 \\ x\in I}} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy = f(x)$$

σε κάθε σημείο συνέχειας της f (άρα, σχεδόν παντού στο $[a, b]$).

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: δίνεται μια συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Είναι σωστό ότι

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x) \tag{2.1.1}$$

σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$; Με B συμβολίζουμε ανοικτές μπάλες του $\mathbb{R}^n$: για δοθέν x θεωρούμε εκείνες τις μπάλες που περιέχουν το x και αφήνουμε τον όγκο τους (ισοδύναμα, την ακτίνα τους) να πάει στο μηδέν.

Παρατηρήστε ότι η (2.1.1) ισχύει σε κάθε σημείο συνέχειας της f. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|y - x| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε μπάλα B που περιέχει το x και έχει ακτίνα μικρότερη από $\delta/2$, όλα τα $y \in B$ ικανοποιούν την $|y - x| < \delta$, απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy\right| &= \left|\frac{1}{m(B)}\int_B (f(x) - f(y))\,dy\right| \\ &\leqslant \frac{1}{m(B)}\int_B |f(x) - f(y)|\,dy \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται η (2.1.1).

Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι το **θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue**, το οποίο δίνει κάτι πολύ ισχυρότερο.

Θεώρημα 2.1.1 (θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue). *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x) \tag{2.1.2}$$

σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue m στον $\mathbb{R}^n$.

Για την απόδειξη θα χρειαστεί να κάνουμε βαθύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των μέσων τιμών μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε μπάλες. Στην επόμενη παράγραφο εισάγουμε την **μεγιστική συνάρτηση** των Hardy και Littlewood και μελετάμε την συνάρτηση κατανομής της με την βοήθεια του λήμματος κάλυψης του Vitali.

2.2 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood

Ορισμός 2.2.1 (μεγιστική συνάρτηση). Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση f^* της f ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2.1}$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις ανοικτές μπάλες που περιέχουν το x. Με λίγα λόγια, αντικαθιστούμε το (ζητούμενο) όριο των μέσων τιμών του Θεωρήματος 2.1.1 με το supremum τους, και την f με την $|f|$.

Οι βασικές ιδιότητες της f^* δίνονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε:*

(i) *Η f^* είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Ισχύει $f^*(x) < \infty$ σχεδόν παντού.*

(iii) *Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C_n}{\alpha} \|f\|_1, \tag{2.2.2}$$

όπου $C_n = 3^n$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f^* είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ το σύνολο $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $f^*(x) > \alpha$ τότε υπάρχει μπάλα B_x η οποία περιέχει το x και για την οποία

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha,$$

και τότε, για κάθε $z \in B_x$ έχουμε

$$f^*(z) \geqslant \frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha,$$

δηλαδή $B_x \subseteq E_\alpha$.

Ο ισχυρισμός (ii) είναι συνέπεια του ισχυρισμού (iii). Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\{x : f^*(x) = \infty\} \subseteq \{x : f^*(x) > \alpha\},$$

άρα

$$m(\{x : f^*(x) = \infty\}) \leqslant m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C_n}{\alpha}\|f\|_1.$$

Αφήνοντας το $\alpha \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $m(\{x : f^*(x) = \infty\}) = 0$.

Παρατήρηση 2.2.3. Η βασική ανισότητα (2.2.2) είναι μια **ασθενούς τύπου** ανισότητα, με την έννοια ότι υπολείπεται του ισχυρισμού ότι $\|f^*\|_1 \leqslant C_n\|f\|_1$. Πράγματι, αν είχαμε κάτι τέτοιο τότε, από την ανισότητα Markov, για κάθε $\alpha > 0$ θα γράφαμε

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f^*\|_1 \leqslant \frac{C_n}{\alpha}\|f\|_1.$$

Στην πραγματικότητα, η f^* δεν είναι (σχεδόν ποτέ) ολοκληρώσιμη, και η (2.2.2) είναι η καλύτερη πληροφορία που θα μπορούσαμε να πάρουμε για την κατανομή της συναρτήσει της $\|f\|_1$,

Για την απόδειξη του ισχυρισμού (iii) θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα κάλυψης του Vitali.

Λήμμα 2.2.4. *Έστω $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτές μπάλες στον $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ να είναι ξένες ανά δύο και να ισχύει*

$$m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}). \tag{2.2.3}$$

Απόδειξη. Η επιλογή των B_{i_j} γίνεται με τον πιο φυσιολογικό τρόπο. Στο πρώτο βήμα, επιλέγουμε μία από τις μπάλες, την B_{i_1}, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{B}$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{B}$ που την τέμνουν. Οι υπόλοιπες μπάλες σχηματίζουν μια υποοικογένεια $\mathcal{B}'$ της $\mathcal{B}$ στην οποία επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Επιλέγουμε μία από τις μπάλες της $\mathcal{B}'$, την B_{i_2}, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{B}'$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{B}'$ που την τέμνουν. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μετά από N το πολύ βήματα, έχουμε επιλέξει κάποιες (ξένες) μπάλες $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ και η διαδικασία τερματίζεται.

Για την απόδειξη της (2.2.3) θα χρησιμοποιήσουμε την εξής παρατήρηση: αν B και B' είναι δύο ανοικτές μπάλες με $B \cap B' \neq \emptyset$ και αν η ακτίνα $r(B)$ της B είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ακτίνα $r(B')$ της B', τότε η B' περιέχεται στην μπάλα $\tilde{B}$ που έχει το ίδιο κέντρο με την B και ακτίνα $r(\tilde{B}) = 3r(B)$. Η απόδειξη είναι απλή συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας.

Συμβολίζοντας με $\tilde{B}_{i_j}$ τη μπάλα που έχει το ίδιο κέντρο με την B_{i_j} και ακτίνα $r(\tilde{B}_{i_j}) = 3r(B_{i_j})$, και παρατηρώντας ότι κάθε $B_\ell \in \mathcal{B}$ τέμνει κάποια B_{i_j} για την οποία $r(B_\ell) \leqslant r(B_{i_j})$, συμπεραίνουμε ότι

$$\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}.$$

Άρα,

$$m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leqslant m\left(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} m(\tilde{B}_{i_j}) = 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει την (2.2.3). □

Απόδειξη του ισχυρισμού (iii). Έστω $\alpha > 0$. Ορίζουμε $E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$ και για κάθε $x \in E_\alpha$ επιλέγουμε ανοικτή μπάλα B_x με $x \in B_x$ και

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha.$$

Ισοδύναμα,

$$m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|\, dy. \tag{2.2.4}$$

Θεωρούμε τυχόν συμπαγές $K \subseteq E_\alpha$. Έχουμε $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_x$, άρα υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_{x_1}, \ldots, B_{x_N}\}$ ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}.$$

Από το λήμμα του Vitali μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $B_{x_{i_j}}$, $j = 1, \dots, k$, να είναι ξένες, και

$$m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}\right) \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{x_{i_j}}). \tag{2.2.5}$$

Αφού οι $B_{x_{i_1}}, \dots, B_{x_{i_k}}$ είναι ξένες, συνδυάζοντας τις (2.2.4) και (2.2.5) γράφουμε

$$\begin{aligned} m(K) &\leqslant m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}\right) \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{x_{i_j}}) \\ &\leqslant \frac{3^n}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{x_{i_j}}} |f(y)|\, dy = \frac{3^n}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{x_{i_j}}} |f(y)|\, dy \\ &\leqslant \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy = \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Αφού $m(E_\alpha) = \sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές υποσύνολο του } E_\alpha\}$, έπεται το ζητούμενο. □

2.3 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 2.1.1 και παρουσιάζουμε κάποιες παραλλαγές και κάποιες σημαντικές εφαρμογές του.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$, το σύνολο

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy - f(x) \right| > 2\alpha \right\}$$

έχει μέτρο $m(E_\alpha) = 0$. Τότε, το σύνολο $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$ έχει μέτρο $m(E) = 0$, και για κάθε $x \notin E$ ισχύει

$$\limsup_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy - f(x) \right| = 0,$$

δηλαδή,

$$\lim_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy = f(x).$$

Σταθεροποιούμε $\alpha > 0$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε συνεχή συνάρτηση g με συμπαγή φορέα, η οποία ικανοποιεί την

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Αφού η g είναι συνεχής, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\lim_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B g(y)\, dy = g(x).$$

Γράφουμε

$$\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy - f(x) = \frac{1}{m(B)}\int_B (f(y)-g(y))\,dy + \frac{1}{m(B)}\int_B g(y)\,dy - g(x) \\ + g(x) - f(x),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-g(y)|\,dy + \left|\frac{1}{m(B)}\int_B g(y)\,dy - g(x)\right| \\ &\quad + |g(x)-f(x)| \\ &\leqslant (f-g)^*(x) + \left|\frac{1}{m(B)}\int_B g(y)\,dy - g(x)\right| + |g(x)-f(x)|,\end{aligned}$$

άρα

$$\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| \leqslant (f-g)^*(x) + |g(x)-f(x)|.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

$$F_\alpha = \{x : (f-g)^*(x) > \alpha\} \quad \text{και} \quad G_\alpha = \{x : |f(x)-g(x)| > \alpha\},$$

έχουμε $E_\alpha \subseteq F_\alpha \cup G_\alpha$ (αν $u+v>2\alpha$ τότε είτε $u>\alpha$ ή $v>\alpha$).

Τώρα, χρησιμοποιώντας την

$$m(F_\alpha) = m(\{x : (f-g)^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{3^n}{\alpha}\|f-g\|_1$$

(βλέπε Θεώρημα 2.2.2 (iii)) και την

$$m(G_\alpha) = m(\{x : |f(x)-g(x)| > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_1$$

που είναι άμεση από την ανισότητα του Markov, παίρνουμε

$$m(E_\alpha) \leqslant m(F_\alpha) + m(G_\alpha) \leqslant \frac{3^n+1}{\alpha}\|f-g\|_1 = \frac{C_n'}{\alpha}\varepsilon,$$

όπου $C_n' = 3^n+1$. Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $m(E_\alpha)=0$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 2.3.1. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.1 είναι το γεγονός ότι: αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε $|f(x)| \leqslant f^*(x)$ σχεδόν παντού (εξηγήστε γιατί).

Ορισμός 2.3.2. Μια μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται **τοπικά ολοκληρώσιμη** αν για κάθε μπάλα $B \subset \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $f(x)\chi_B(x)$ είναι ολοκληρώσιμη. Συμβολίζουμε με $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι αν $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ και αν σταθεροποιήσουμε μια ανοικτή μπάλα B_0 (π.χ. την $B(0,k)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$) τότε για κάθε $x \in B_0$ έχουμε

$$\frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy = \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\chi_{B_0}(y)\, dy$$

αν θεωρήσουμε B που περιέχει το x και είναι αρκετά μικρή ώστε να περιέχεται στην B_0. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα παραγώγισης για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \cdot \chi_{B_0}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x)$$

σχεδόν παντού στην B_0. Κάνοντας την ίδια δουλειά με $B_0 = B(0,k)$, $k = 1, 2, \dots$, έχουμε την ακόλουθη επέκταση του Θεωρήματος 2.1.1:

Θεώρημα 2.3.3. *Αν $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ τότε*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x) \tag{2.3.1}$$

σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue m στον $\mathbb{R}^n$. □

Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε κάτι ισχυρότερο. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό.

Ορισμός 2.3.4. Έστω $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Το **σύνολο Lebesgue** $\text{Leb}(f)$ της f αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $|f(x)| < \infty$ και

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

Στην Παράγραφο 2.1 είδαμε ότι αν η f είναι συνεχής στο x τότε $x \in \text{Leb}(f)$. Επίσης, είναι φανερό ότι αν $x \in \text{Leb}(f)$ τότε

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αν $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ τότε σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο σύνολο Lebesgue της f.

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

$$m(\mathbb{R}^n \setminus \text{Leb}(f)) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $q \in \mathbb{Q}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.3 για την τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $|f(y) - q|$ βλέπουμε ότι υπάρχει $E_q \subset \mathbb{R}^n$ με $m(E_q) = 0$ ώστε: αν $x \notin E_q$ τότε

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - q|\, dy = |f(x) - q|.$$

Θέτουμε $E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q$. Τότε, $m(E) = 0$ και θα δείξουμε ότι: αν $x \notin E$ και $|f(x)| < \infty$ τότε $x \in \mathrm{Leb}(f)$.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε ρητό q με $|f(x) - q| < \varepsilon$. Γράφουμε

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy \leqslant \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - q|\, dy + |f(x) - q|$$

για κάθε μπάλα B με $x \in B$, και αφήνοντας το $m(B) \to 0$ παίρνουμε

$$\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy \leqslant |f(x) - q| + |f(x) - q| < 2\varepsilon,$$

διότι $x \notin E_q$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy = 0,$$

δηλαδή $x \in \mathrm{Leb}(f)$. $\square$

Μία ενδιαφέρουσα και χρήσιμη εφαρμογή του θεωρήματος παραγώγισης του Lebesgue αφορά την δομή των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 2.3.6. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το $x \in \mathbb{R}^n$ είναι **σημείο πυκνότητας** του E αν

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{m(E\cap B)}{m(B)} = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ και για κάθε ανοικτή μπάλα B που περιέχει το x και έχει αρκετά μικρή ακτίνα, ισχύει

$$m(E\cap B) \geqslant (1-\varepsilon) m(B).$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.3 στην τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση χ_E παίρνουμε αμέσως το εξής:

Θεώρημα 2.3.7. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, σχεδόν κάθε σημείο του E είναι σημείο πυκνότητας του E και σχεδόν κάθε $x \notin E$ δεν είναι σημείο πυκνότητας του E – ακριβέστερα, σχεδόν όλα τα $x \notin E$ είναι σημεία πυκνότητας του $\mathbb{R}^n \setminus E$, άρα ικανοποιούν την*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{m(E\cap B)}{m(B)} = 0.$$

2.4 Οικογένειες καλών πυρήνων και προσεγγίσεων της μονάδας

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μέσες τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f οι οποίες προκύπτουν από την συνέλιξη της f

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\delta(y)\,dy$$

με μια οικογένεια (K_δ) συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες.

Ορισμός 2.4.1 (οικογένεια καλών πυρήνων)**.** Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται **οικογένεια καλών πυρήνων**, ή πιο απλά **πυρήνας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(y)\,dy = 1.$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\,dy \leqslant M.$$

(iii) Για κάθε $\eta > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\,dy = 0.$$

Η συνέλιξη $f * K_\delta$ μιας φραγμένης μετρήσιμης συνάρτησης f με μια οικογένεια καλών πυρήνων $(K_\delta)_{\delta>0}$ συγκλίνει στην f σε κάθε σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής:

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων και έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ στο οποίο η f είναι συνεχής, έχουμε*

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|y| < \eta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) της (K_δ), γράφουμε

$$(f * K_\delta)(x) - f(x) = \int K_\delta(y) f(x-y)\,dy - f(x) = \int K_\delta(y)[f(x-y) - f(x)]\,dy.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &= \left|\int K_\delta(y)[f(x-y)-f(x)]\,dy\right| \\ &\leqslant \int_{|y|<\eta} |K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy + \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy.\end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι: αν $|y| < \eta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα (ii) της (K_δ), παίρνουμε

$$\int_{|y|<\eta} |K_\delta(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\,dy \leqslant M\varepsilon.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (iii) της (K_δ) για το συγκεκριμένο η: έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\,dy &\leqslant \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\,(|f(x-y)| + |f(x)|\,dy \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\,dy \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $\delta \to 0$. Συνεπώς,

$$\limsup_{\delta\to 0} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| \leqslant M\varepsilon,$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $(f * K_\delta)(x) \to f(x)$ καθώς το $\delta \to 0$. □

Ορισμός 2.4.3 (οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας)**.** Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται **οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας**, ή πιο απλά **προσέγγιση της μονάδας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(y)\,dy = 1.$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$|K_\delta(y)| \leqslant \frac{M}{\delta^n}.$$

(iii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$|K_\delta(y)| \leqslant \frac{M\delta}{|y|^{n+1}}.$$

Μπορούμε προφανώς να υποθέσουμε ότι η σταθερά M είναι η ίδια στα (ii) και (iii). Παρατηρήστε ότι η ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από αυτήν στην (iii) αν $|y| \leqslant \delta$. Τελείως αντίστοιχα, η ανισότητα στην (iii) είναι ισχυρότερη από αυτήν στην (ii) αν $|y| \geqslant \delta$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι υποθέσεις του Ορισμού 2.4.3 είναι ισχυρότερες από αυτές του Ορισμού 2.4.1. Για να το επαληθεύσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε το εξής απλό λήμμα.

Λήμμα 2.4.4. *Για κάθε $\eta > 0$ ισχύει*

$$\int_{|x|\geqslant\eta} \frac{dy}{|y|^{n+1}} = \frac{n\omega_n}{\eta}, \tag{2.4.1}$$

όπου ω_n είναι ο όγκος της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας:

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Απόδειξη. Με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες (γράφουμε $y = t\theta$, όπου $\theta \in S^{n-1}$ και $t \in [\eta, \infty)$) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{|y|\geqslant \eta} \frac{dy}{|y|^{n+1}} &= \int_{S^{n-1}} \int_{\eta}^{\infty} t^{n-1} \frac{1}{t^{n+1}}\, dt\, d\theta \\ &= |S^{n-1}| \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{|S^{n-1}|}{\eta},\end{aligned}$$

όπου $|S^{n-1}| = n\omega_n$ είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας Ευκλείδειας σφαίρας. □

Πρόταση 2.4.5. *Κάθε οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ προσεγγίσεων της μονάδας είναι οικογένεια καλών πυρήνων.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε: για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\, dy \leqslant R.$$

Έστω $\delta > 0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.4.4 και τις ιδιότητες (ii) και (iii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\, dy &= \int_{|y|<\delta} |K_\delta(y)|\, dy + \int_{|y|\geqslant\delta} |K_\delta(y)|\, dy \\ &\leqslant \frac{M}{\delta^n} \int_{|y|<\delta} \mathbf{1}\, dy + M\delta \int_{|y|\geqslant\delta} \frac{dy}{|y|^{n+1}} \\ &= \frac{M}{\delta^n} \cdot \omega_n \delta^n + M\delta \cdot \frac{n\omega_n}{\delta} \\ &= (n+1)\omega_n M.\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο με $R = (n+1)\omega_n M$.

Για την τρίτη ιδιότητα της οικογένειας καλών πυρήνων, σταθεροποιούμε $\eta > 0$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.4.4 και την ιδιότητα (iii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, dy \leqslant M\delta \int_{|y|\geqslant\eta} \frac{dy}{|y|^{n+1}} = \frac{Mn\omega_n}{\eta}\delta \to 0$$

καθώς το $\delta \to 0$. □

Παραδείγματα 2.4.6. (α) Έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια μη αρνητική, φραγμένη συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από τη μοναδιαία μπάλα $\{y : |y| \leqslant 1\}$ και έχει ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, dy = 1.$$

Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $K_\delta(y) = \delta^{-n}\varphi(\delta^{-1}y)$. Η $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

(β) Ο πυρήνας της θερμότητας $\mathcal{H}_t$ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{H}_t(y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y|^2/4t}.$$

Η οικογένεια $(\mathcal{H}_{\delta^2})_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

Το επόμενο βασικό θεώρημα «επεκτείνει» το Θεώρημα 2.4.2.

Θεώρημα 2.4.7. *Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x)$$

σε κάθε σημείο Lebesgue x της f. Συνεπώς, $f * K_\delta \to f$ σχεδόν παντού καθώς το $\delta \to 0$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.7 θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.4.8. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και έστω $f \in \mathrm{Leb}(f)$. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r^n}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, dy, \qquad r > 0.$$

Τότε, η συνάρτηση $\mathcal{A}$ είναι φραγμένη, συνεχής, και

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{A}(r) = 0.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $r \mapsto r^n\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής σε κάθε $r > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος: αφού $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, αν θεωρήσουμε μια ακολουθία $r_k \to r^+$ τότε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant r_k^n\mathcal{A}(r_k) - r^n\mathcal{A}(r) &= \left| \int_{|y|\leqslant r_k} |f(x-y) - f(x)|\, dy - \int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, dy \right| \\ &= \int_{r<|y|\leqslant r_k} |f(x-y) - f(x)|\, dy \to 0 \end{aligned}$$

καθώς το $k\to\infty$, διότι η $y \mapsto |f(x-y) - f(x)|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και $m(\{y : r < |y| \leqslant r_k\}) \to 0$ όταν $k \to \infty$. Παρόμοιο επιχείρημα δείχνει τη συνέχεια από αριστερά.

Αφού $x \in \mathrm{Leb}(f)$ έχουμε

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(z) - f(x)|\, dz = 0.$$

Όμως,

$$\mathcal{A}(r) = \omega_n \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(z) - f(x)|\, dz,$$

άρα είναι φανερό ότι $\mathcal{A}(r) \to 0$ καθώς το $r \to 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι συνεχής και $\lim_{r\to 0}\mathcal{A}(r) = 0$. Συνεπώς, υπάρχει $M_1 > 0$ ώστε $0 \leqslant \mathcal{A}(r) \leqslant M_1$ για κάθε $r \in [0,1]$. Για $r > 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(r) &= \frac{1}{r^n}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\,dy \\
&\leqslant \frac{1}{r^n}\int_{B(x,r)} |f(z)|\,dz + \frac{1}{r^n}\int_{|y|\leqslant r} |f(x)|\,dy \\
&\leqslant \int_{B(x,r)} |f(z)|\,dz + \frac{1}{r^n}|f(x)|\,\omega_n r^n \\
&\leqslant M_2 := \|f\|_1 + \omega_n |f(x)|.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $0 \leqslant \mathcal{A}(r) \leqslant \max\{M_1, M_2\}$ για κάθε $r > 0$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.7. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε πρώτα $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Στη συνέχεια, για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
|(f*K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy \\
&\leqslant \int_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\delta<|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy \\
&\leqslant \frac{M}{\delta^n}\int_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y) - f(x)|\,dy \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} M\delta \int_{2^k\delta<|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\,\frac{1}{|y|^{n+1}}dy \\
&\leqslant M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M\delta}{(2^k\delta)^{n+1}}\int_{|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\,dy \\
&= M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M\delta}{(2^k\delta)^{n+1}}(2^{k+1}\delta)^n\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \\
&= M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^n M}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \\
&\leqslant M_1\left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\right],
\end{aligned}$$

όπου $M_1 = 2^n M$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\|\mathcal{A}\|_\infty < \infty$ και το γεγονός ότι $\lim_{\delta\to 0}\mathcal{A}(\delta) = 0$. Υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ να έχουμε

$$\mathcal{A}(2^k\delta) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Τότε, για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant M_1 \left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\right] \\
&\leqslant M_1 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k}\right)\frac{\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right] \\
&\leqslant M_1 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \varepsilon\right] \\
&= M_1(1 + \|\mathcal{A}\|_\infty)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x)$. □

Το τελευταίο θεώρημα αυτής της παραγράφου αναφέρεται στη σύγκλιση της $f * K_\delta$ στην f ως προς την $\|\cdot\|_1$.

Θεώρημα 2.4.9. *Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια καλών πυρήνων. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $\delta > 0$, η συνέλιξη*

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\delta(y)\,dy$$

είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, και

$$\|(f * K_\delta) - f\|_1 \to 0 \ \ \text{καθώς το } \delta \to 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|(f * K_\delta) - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f * K_\delta)(x) - f(x)|\,dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\,dx\right)|K_\delta(y)|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \|f_{-y} - f\|_1\,|K_\delta(y)|\,dy,
\end{aligned}$$

όπου $f_{-y}(x) = f(x-y)$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\lim_{y\to 0}\|f_{-y} - f\|_1 = 0$$

(άσκηση). Δηλαδή, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε

$$|y| < \eta \Longrightarrow \|f_{-y} - f\|_1 < \varepsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας και την $\|f_{-y} - f\|_1 \leqslant \|f_{-y}\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|(f * K_\delta) - f\|_1 &\leqslant \int_{|y|<\eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)|\, dy + \int_{|y|\geqslant\eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)|\, dy \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\, dy + 2\|f\|_1 \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, dy \\ &\leqslant M\varepsilon + 2\|f\|_1 \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, dy,\end{aligned}$$

όπου $M := \sup \|K_\delta\|_1 < \infty$ (αφού η (K_δ) είναι πυρήνας). Αφήνοντας το $\delta \to 0$ και χρησιμοποιώντας την

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, dy = 0,$$

παίρνουμε

$$\limsup_{\delta\to 0} \|(f * K_\delta) - f\|_1 \leqslant M\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\|(f * K_\delta) - f\|_1 \to 0$ καθώς το $\delta \to 0$. $\square$

Κεφάλαιο 3

Μετασχηματισμός Fourier

3.1 Μετασχηματισμός Fourier στον $L^1(\mathbb{R}^n)$

Ορισμός 3.1.1 (μετασχηματισμός Fourier)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ο **μετασχηματισμός Fourier** της f είναι η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ με

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Λήμμα 3.1.2. *Ο τελεστής $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ που ορίζεται από την $\mathcal{F}_1(f) = \widehat{f}$ είναι φραγμένος τελεστής, και $\|\mathcal{F}_1\| \leqslant 1$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle}|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \sup_{\xi} |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1.$$

Η γραμμικότητα του $\mathcal{F}_1$ είναι απλή: από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι, για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ ισχύει $\widehat{af + bg} = a\widehat{f} + b\widehat{g}$. □

Λήμμα 3.1.3. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι συνεχής συνάρτηση και μηδενίζεται στο άπειρο:*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0. \tag{3.1.1}$$

Ειδικότερα, η $\widehat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη. Για τη συνέχεια της $\widehat{f}$ σταθεροποιούμε $\xi \in \mathbb{R}^n$ και τυχούσα ακολουθία (t_k) στον $\mathbb{R}^n$ με $t_k \to 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi+t_k)-\widehat{f}(\xi)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle \xi+t_k,x\rangle}-e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}|\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}|\,|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}-1|\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}-1|\,dx.\end{aligned}$$

Ορίζουμε $g_k(x)=|f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}-1|$. Αφού $\lim_{k\to\infty}(e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle})=1$ για κάθε x, έχουμε $g_k(x)\to 0$ σχεδόν παντού (σε κάθε x για το οποίο $|f(x)|<\infty$). Επίσης,

$$0\leqslant g_k(x)\leqslant |f(x)|(|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}|+1)=2|f(x)|.$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\,dx=0,$$

δηλαδή $\widehat{f}(\xi+t_k)\to\widehat{f}(\xi)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\widehat{f}$ είναι συνεχής στο ξ.

Για την απόδειξη της (3.1.1) μπορούμε να δουλέψουμε με διάφορους τρόπους. Ο πρώτος είναι ξεκινήσουμε αποδεικνύοντάς την για την χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ορθογωνίου $Q=\prod_{j=1}^n[a_j,b_j]$. Στην περίπτωση $n=1$ έχουμε

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi)=\int_a^b e^{-2\pi i\xi t}dt=\frac{e^{-2\pi i\xi a}-e^{-2\pi i\xi b}}{2\pi i\xi},$$

άρα

$$|\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi)|\leqslant\frac{2}{2\pi|\xi|}\to 0$$

καθώς το $|\xi|\to\infty$. Στην γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_Q}(\xi)&=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}e^{-2\pi i\sum_{j=1}^n\xi_jt_j}dt_n\cdots dt_1\\ &=\prod_{j=1}^n\int_{a_j}^{b_j}e^{-2\pi i\xi_jt_j}dt_j=\prod_{j=1}^n\frac{e^{-2\pi i\xi_ja_j}-e^{-2\pi i\xi_jb_j}}{2\pi i\xi_j}.\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι κάθε όρος του γινομένου φράσσεται απολύτως από b_j-a_j (θυμηθείτε το Λήμμα 3.1.2) μπορούμε να γράψουμε

$$|\widehat{\chi_Q}(\xi)|\leqslant\frac{1}{\pi|\xi_{j_0}|}\prod_{j\neq j_0}(b_j-a_j),$$

όπου $|\xi_{j_0}|=\|\xi\|_\infty\geqslant\frac{|\xi|}{\sqrt{n}}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\|\xi\|_\infty\to 0$ καθώς το $|\xi|\to\infty$, και συμπεραίνουμε ότι $\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{\chi_Q}(\xi)=0$.

Έχουμε τώρα την (3.1.1) για κάθε απλή συνάρτηση f που είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων της μορφής $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$. Με ένα επιχείρημα προσέγγισης, βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: για κάθε $\xi \neq 0$ ορίζουμε $\xi' = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi')e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx &= e^{-2\pi i\langle \xi',\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi')e^{-2\pi i\langle x-\xi',\xi\rangle}dx\\ &= e^{-\pi i}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi\rangle}dx\\ &= -\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)-f(x-\xi'))e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-f_{-\xi'}(x)|\,dx\\ &= \frac{1}{2}\|f-f_{-\xi'}\|_1 \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $|\xi| \to \infty$ (θυμηθείτε ότι $f_h(x) := f(x+h)$ και παρατηρήστε ότι $|\xi'| = \frac{1}{2|\xi|} \to 0$). □

Παρατήρηση 3.1.4. Θα συμβολίζουμε με $C_0(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των συνεχών συναρτήσεων $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ που μηδενίζονται στο άπειρο. Ως τώρα έχουμε δείξει ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Οι επόμενες δύο προτάσεις μας δίνουν βασικές αλγεβρικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Πρόταση 3.1.5. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε:*

(i) *Αν $h \in \mathbb{R}^n$ και $(\tau_h f)(x) = f_{-h}(x) = f(x-h)$,*
$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i\langle \xi,h\rangle}.$$

(ii) *Αν $h \in \mathbb{R}^n$,*
$$\widehat{e^{2\pi i\langle\cdot,h\rangle}f}(\xi) = (\tau_h\widehat{f})(\xi).$$

(iii) *Αν $\delta > 0$ και $f_\delta(x) = f(\delta x)$,*
$$\widehat{f_\delta}(\xi) = \frac{1}{\delta^n}\widehat{f}(\xi/\delta).$$

Απόδειξη. (i) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\tau_h f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{-2\pi i\langle x-h,\xi\rangle}e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}dx\\ &= e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi\rangle}dz = e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(ii) Γράφουμε

$$\widehat{e^{2\pi i\langle\cdot,h\rangle}f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi i\langle x,h\rangle}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi-h\rangle}dx$$
$$=\widehat{f}(\xi-h)=(\tau_h\widehat{f})(\xi).$$

(iii) Γράφουμε

$$\widehat{f_\delta}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f_\delta(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(\delta x)e^{-2\pi i\langle \delta x,\xi/\delta\rangle}dx$$
$$=\frac{1}{\delta^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi/\delta\rangle}dz=\frac{1}{\delta^n}\widehat{f}(\xi/\delta).$$

□

Πρόταση 3.1.6. *Έστω $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, $f*g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\widehat{f*g}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi)$$

για κάθε $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{C}$ με $F(x,y)=f(x-y)g(y)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}$ είναι μετρήσιμη και ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|F(\xi,y)|\,dy\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|g(\xi)|\,|f(y)|\,dy\,d\xi$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}|g(\xi)|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\,dy\right)d\xi$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}|g(\xi)|\,\|f\|_1dy=\|f\|_1\|g\|_1<\infty.$$

Μπορούμε λοιπόν, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini και την Πρόταση 3.1.5 (i), να γράψουμε

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}dx\right)dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}g(y)e^{-2\pi i\langle\xi,y\rangle}\widehat{f}(\xi)\,dy$$
$$=\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

□

3.2 Ο τύπος αντιστροφής του Fourier

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να αποδείξουμε τον τύπο αντιστροφής του Fourier στην εξής μορφή:

Θεώρημα 3.2.1 (τύπος αντιστροφής). *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2. Βασικό ρόλο θα παίξει επίσης ο ακόλουθος **πολλαπλασιαστικός τύπος**:

Θεώρημα 3.2.2 (πολλαπλασιαστικός τύπος). *Έστω f και g δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g}(y)\, dy.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F(\xi, y) = g(\xi) f(y) e^{-2\pi i \langle \xi, y \rangle}$ είναι μετρήσιμη και ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle \xi, y \rangle} dy \right) g(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-2\pi i \langle \xi, y \rangle} d\xi \right) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

□

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης μια ειδική συνάρτηση:

Λήμμα 3.2.3. *Έστω $\delta > 0$ και έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Για τη συνάρτηση*

$$g_\delta(\xi) = e^{-\pi \delta |\xi|^2} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}$$

ισχύει ότι

$$\widehat{g_\delta}(y) = \frac{1}{\delta^{n/2}} e^{-\pi \frac{|x-y|^2}{\delta}}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(\xi) = e^{-\pi \delta |\xi|^2}$. Από την Πρόταση 3.1.5 (ii) έχουμε

$$\widehat{g_\delta}(y) = (\tau_x \widehat{h})(y) = \widehat{h}(y - x).$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $u(\xi) = e^{-\pi |\xi|^2}$. Τότε, $h(\xi) = u(\sqrt{\delta}\xi)$. Από την Πρόταση 3.1.5 (iii) έχουμε

$$\widehat{h}(y) = \frac{1}{\delta^{n/2}} \widehat{u}(y/\sqrt{\delta}).$$

Τέλος, υπολογίζουμε την

$$\widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2} e^{-2\pi i\langle \xi, y\rangle} d\xi = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\xi_j^2} e^{-2\pi i\xi_j y_j} d\xi_j.$$

Απλός υπολογισμός (μιγαδική ολοκλήρωση) δείχνει ότι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 - 2\pi i y t} dt = e^{-\pi y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+iy)^2} dt = e^{-\pi y^2}.$$

Συνεπώς,

$$\widehat{h}(y) = \prod_{j=1}^n e^{-\pi y_j^2} = e^{-\pi|y|^2}$$

και

$$\widehat{g_\delta}(y) = \widehat{h}(y-x) = \frac{1}{\delta^{n/2}} \widehat{u}\Big(\frac{y-x}{\sqrt{\delta}}\Big) = \frac{1}{\delta^{n/2}} e^{-\frac{\pi|y-x|^2}{\delta}}.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Θεωρούμε την οικογένεια $(K_{\delta^2})_{\delta>0}$. Ελέγχουμε πρώτα ότι είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας: για κάθε $\delta > 0$, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \delta z$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_{\delta^2}(y)\, dy = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|z|^2} dz = 1.$$

Είναι προφανές ότι, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$0 \leqslant K_{\delta^2}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} \leqslant \frac{1}{\delta^n}.$$

Μένει να δείξουμε ότι: αν $|y| \geqslant \delta$ τότε $|K_{\delta^2}(y)| \leqslant M\delta/|y|^{n+1}$ για κάποια σταθερά $M_n > 0$. Χρησιμοποιώντας την $e^t \geqslant t^{n+1}/(n+1)!$ με $t = \sqrt{\pi}|y|/\delta$, γράφουμε

$$0 \leqslant K_{\delta^2}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} \leqslant \frac{1}{\delta^n} \frac{(n+1)!\delta^{n+1}}{\pi^{(n+1)/2}|y|^{n+1}} = \frac{M_n\delta}{|y|^{n+1}},$$

όπου $M_n = (n+1)!/\pi^{(n+1)/2}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Από τον πολλαπλασιαστικό τύπο (Θεώρημα 3.2.2) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g_{\delta^2}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g_{\delta^2}}(y)\, dy.$$

Από το Λήμμα 3.2.3 έχουμε $\widehat{g_{\delta^2}}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\pi\frac{|x-y|^2}{\delta^2}}$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_{\delta^2}(x-y)\, dy = (f * K_{\delta^2})(x)$$

για κάθε $\delta > 0$.

Παρατηρούμε ότι, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού η $(K_{\delta^2})_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας, για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$ έχουμε

$$\lim_{\delta \to 0} (f * K_{\delta^2})(x) = f(x).$$

Αφού $m(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Leb}(f)) = 0$, έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.2.4 (μοναδικότητα)**.** *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Αν $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$, τότε $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Αφού $\widehat{f-g} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0$, έχουμε $f - g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f-g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Άρα,

$$(f-g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f-g}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi = 0 \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Δηλαδή, $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού. □

Η παρατήρηση της επόμενης Πρότασης θα μας φανεί χρήσιμη στην επόμενη παράγραφο.

Πρόταση 3.2.5. *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f} \geqslant 0$, και αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, άρα*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Απόδειξη. Επιστρέφουμε στην απόδειξη του τύπου αντιστροφής. Για $x = 0$ και για κάθε $\delta > 0$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\, d\xi = (f * K_{\delta^2})(0).$$

Αφού $\widehat{f} \geqslant 0$, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο 0, έχουμε

$$\lim_{\delta \to 0} (f * K_{\delta^2})(0) = f(0).$$

Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = f(0),$$

δηλαδή $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Κατόπιν, εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.2.1. □

3.3 Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Θα υποθέσουμε πρώτα ότι $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Τότε, από την Παράγραφο 3.1 γνωρίζουμε ότι ορίζεται καλά ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f} = \mathcal{F}_1(f)$.

Θεώρημα 3.3.1. *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ τότε $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε g με $g(x) = \overline{f(-x)}$. Είναι φανερό ότι $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ και

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)}\, e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)\, e^{-2\pi i\langle -x,\xi\rangle}}\, dx \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\, e^{-2\pi i\langle -x,\xi\rangle}\, dx} = \overline{\widehat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f*g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{f}(\xi)} = |\widehat{f}(\xi)|^2 \geqslant 0.$$

Επίσης, η $f*g$ είναι συνεχής στο 0. Έχουμε

$$\begin{aligned}|(f*g)(h) - (f*g)(0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(h-x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x-h)}\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\,dx\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|\overline{f(x-h)} - \overline{f(x)}|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|f(x-h) - f(x)|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|f_{-h}(x) - f(x)|\,dx \\ &\leqslant \|f\|_2\,\|f_{-h} - f\|_2 \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $h \to 0$, όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τις f και $f_{-h} - f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, και το γεγονός ότι $\lim_{h\to 0}\|f_{-h} - f\|_2 = 0$.

Από την Πρόταση 3.2.5 συμπεραίνουμε ότι $\widehat{f*g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και

$$(f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f*g}(\xi)\,d\xi.$$

Όμως,

$$(f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f*g}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}\,d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2.$$

Συνεπώς, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. □

Από το Θεώρημα 3.3.1 έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας καλά ορισμένος φραγμένος γραμμικός τελεστής στο πυκνό υποσύνολο $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ του $L^2(\mathbb{R}^n)$, και μάλιστα είναι ισομετρία. Συνεπώς, υπάρχει φραγμένη γραμμική επέκταση $\mathcal{F}_2$ αυτού του τελεστή σε ολόκληρο τον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Θα λέμε ότι ο $\mathcal{F}_2$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ και θα συνεχίσουμε να γράφουμε $\widehat{f} = \mathcal{F}_2(f)$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό, η $\widehat{f} = \mathcal{F}_2(f)$ είναι το L^2-όριο της ακολουθίας $\{\widehat{g}_k\}$, όπου $\{g_k\}$ είναι μια ακολουθία στον $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ η οποία συγκλίνει στην f ως προς την $\|\cdot\|_2$. Μπορούμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$g_k(x) = f(x)\chi_{\{|x|\leqslant k\}}(x). \tag{3.3.1}$$

Άρα, η $\widehat{f}$ είναι το L^2-όριο της $\{\widehat{g}_k\}$, όπου

$$\widehat{g}_k(\xi) = \int_{\{|x|\leqslant k\}} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx. \tag{3.3.2}$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ο $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής.

Θεώρημα 3.3.2. *Ο $\mathcal{F}_2$ είναι ορθομοναδιαίος.*

Απόδειξη. Αφού ο $\mathcal{F}_2$ είναι ισομετρία, το σύνολο τιμών του είναι ένας κλειστός υπόχωρος M του $L^2(\mathbb{R}^n)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ με $\|h\|_2 \neq 0$ και την ιδιότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)h(x)\,dx = 0$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιαστικός τύπος του Θεωρήματος 3.2.2 επεκτείνεται στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{h}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx = 0$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Έπεται ότι $\widehat{h} = 0$, άρα $\|h\|_2 = \|\widehat{h}\|_2 = 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Μπορούμε επίσης να περιγράψουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}_2^{-1}$.

Θεώρημα 3.3.3. *Για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ έχουμε*

$$(\mathcal{F}_2^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}_2 g)(-x). \tag{3.3.3}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη εκφράζουμε την $\mathcal{F}_2^{-1}(\widehat{f})$ σαν το L^2-όριο της ακολουθίας συναρτήσεων

$$f_k(x) = \int_{\{|y|\leqslant k\}} \widehat{f}(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy. \tag{3.3.4}$$

Εξηγούμε πρώτα την (3.3.4) στην περίπτωση που $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy = \|\cdot\|_2 - \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\langle h,\tilde{f}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy\right)}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}dx\right)\overline{\widehat{f}(y)}\,dy\\ &= \langle \mathcal{F}_2h,\widehat{f}\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $h\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Δηλαδή,

$$\langle h,\tilde{f}\rangle = \langle \mathcal{F}_2h,\widehat{f}\rangle = \langle \mathcal{F}_2h,\mathcal{F}_2f\rangle = \langle h,f\rangle$$

για κάθε $h\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Έπεται ότι

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy. \tag{3.3.5}$$

Θέτοντας $g=\widehat{f}=\mathcal{F}_2(f)$, έχουμε

$$\mathcal{F}_2^{-1}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy = (\mathcal{F}_2g)(-x). \tag{3.3.6}$$

Τα Θεωρήματα 3.3.2 και 3.3.3 είναι γνωστά ως «θεώρημα Plancherel». □

Κεφάλαιο 4

Σειρές Fourier

4.1 Σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε 2π-περιοδικές Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Μια τέτοια συνάρτηση προσδιορίζεται από τις τιμές της στο $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα μήκους 2π. Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ θεωρούμε τον χώρο $L^p(\mathbb{T})$ των 2π-περιοδικών μετρήσιμων f για τις οποίες

$$\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt < \infty,$$

ταυτίζοντας ως συνήθως συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού, εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Ο $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach (η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν που δόθηκε στο Κεφάλαιο 1). Θεωρούμε επίσης τον χώρο $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ των «ουσιωδώς φραγμένων» 2π-περιοδικών μετρήσιμων f, ο οποίος είναι χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \min\{M \geqslant 0 : m(\{t \in \mathbb{T} : |f(t)| > M\}) = 0\} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Ορισμός 4.1.1 (τριγωνομετρικό πολυώνυμο)**.** Τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \tag{4.1.1}$$

όπου $n \geqslant 0$, $c_k \in \mathbb{C}$ και $|c_n| + |c_{-n}| \neq 0$. Ο n είναι ο βαθμός του p. Θεωρούμε επίσης ότι η μηδενική συνάρτηση είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ikt}dt = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \neq 0 \\ 1 & \text{αν } k = 0 \end{cases}$$

ελέγχουμε εύκολα ότι

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p(t)e^{-ikt}dt \quad \text{για κάθε } |k| \leqslant n. \tag{4.1.2}$$

Ορισμός 4.1.2 (τριγωνομετρική σειρά)**.** Τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}. \tag{4.1.3}$$

Το συμμετρικό n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (4.1.3) είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}. \tag{4.1.4}$$

Ορισμός 4.1.3 (σειρά Fourier)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Η σειρά Fourier της f είναι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \tag{4.1.5}$$

όπου

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}dt. \tag{4.1.6}$$

Το συμμετρικό n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (4.1.5) είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}. \tag{4.1.7}$$

Παρατηρήσεις 4.1.4. Πολύ συχνά είναι προτιμότερο να δουλεύουμε με την σειρά Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων της f. Γράφουμε

$$\begin{aligned} s_n(f,t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k e^{ikt} + c_{-k}e^{-ikt}) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n}[(c_k + c_{-k})\cos kt + i(c_k - c_{-k})\sin kt] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \end{aligned}$$

όπου $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$ και $b_k = i(c_k - c_{-k})$. Αντίστροφα, αν μας δοθεί μια σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos kt\, dt \quad \text{και} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin kt\, dt,$$

τότε μπορούμε να την γράψουμε στη μορφή (4.1.5) θέτοντας $2c_k = a_k - ib_k$.

Αν η f είναι άρτια, δηλαδή $f(-t) = f(t)$ για κάθε t, τότε όλοι οι συντελεστές b_k μηδενίζονται, και

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\, dt.$$

Αν η f είναι περιττή, δηλαδή $f(-t) = -f(t)$ για κάθε t, τότε όλοι οι συντελεστές a_k μηδενίζονται, και

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\, dt.$$

Παρατηρήστε ότι αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $c_{-k} = \overline{c_k}$, άρα οι a_k και b_k είναι πραγματικοί αριθμοί.

Η πρώτη μας πρόταση δείχνει ότι αν τα μερικά αθροίσματα s_n της τριγωνομετρικής σειράς (4.1.3) συγκλίνουν σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ως προς την $\|\cdot\|_1$, τότε $c_k = c_k(f)$ για κάθε k.

Πρόταση 4.1.5. *Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ μια τριγωνομετρική σειρά και έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν $\|s_n - f\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, τότε*

$$c_k = c_k(f) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(t) - s_n(t))e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(t)e^{-ikt}dt.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $|n| \geqslant k$ τότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(t)e^{-ikt}dt = c_k.$$

Άρα, για κάθε $|n| \geqslant k$ έχουμε

$$\begin{aligned} |c_k(f) - c_k| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(t) - s_n(t))e^{-ikt}dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t) - s_n(t)|\, dt = \|f - s_n\|_1 \to 0 \end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι $c_k = c_k(f)$. $\square$

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|c_k(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt = \|f\|_1.$$

Με άλλα λόγια, η $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Ισχύει όμως κάτι ισχυρότερο:

Θεώρημα 4.1.6 (Riemann-Lebesgue). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\lim_{|k|\to\infty} c_k(f) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$ (θα δούμε διάφορες αποδείξεις στη συνέχεια): υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p_ε ώστε

$$\|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$

Έστω $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ο βαθμός του p_ε. Για κάθε $|k| > n_0$ ισχύει

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - p_\varepsilon(t)) e^{-ikt} dt = c_k(f - p_\varepsilon)$$

διότι $\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(t) e^{-ikt} dt = 0$. Συνεπώς,

$$|c_k(f)| = |c_k(f - p_\varepsilon)| \leqslant \|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$$

για κάθε $|k| > n$. Έπεται το ζητούμενο. □

4.1α΄ Ο πυρήνας του Dirichlet

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι

$$\begin{aligned} s_n(f,t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx \right) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)} \right) dx, \end{aligned}$$

δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 4.1.7. Ο n-οστός πυρήνας του Dirichlet είναι η συνάρτηση

$$D_n(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{iky}, \quad n \geqslant 0. \tag{4.1.8}$$

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ο προηγούμενος υπολογισμός μας δίνει το εξής.

Λήμμα 4.1.8. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει*

$$s_n(f,t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) D_n(t-x)\, dx. \tag{4.1.9}$$

Παρατήρηση 4.1.9. Θα χρησιμοποιούμε συχνά τις παρακάτω βασικές ιδιότητες του πυρήνα D_n.

(i) Από τον Ορισμό 4.1.7 παίρνουμε: αν $0 < |y| \leqslant \pi$ τότε

$$\begin{aligned} D_n(y) &= \frac{1}{2}e^{-iny}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)y} = \frac{1}{2}e^{-iny}\sum_{k=0}^{2n} e^{iky} \\ &= \frac{1}{2}e^{-iny}\frac{e^{i(2n+1)y}-1}{e^{iy}-1} = \frac{1}{2}\frac{e^{i(n+1)y}-e^{-iny}}{e^{iy}-1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{iy/2}\left(e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)}{e^{iy/2}(e^{iy/2}-e^{-iy/2})} \\ &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}. \end{aligned}$$

(ii) Πάλι από τον ορισμό της D_n, και από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(y)\,dy = 1, \tag{4.1.10}$$

για κάθε n. Παρατηρήστε ότι η D_n είναι άρτια συνάρτηση. Άρα, μπορούμε επίσης να γράψουμε την προηγούμενη ισότητα στη μορφή

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(y)\,dy = 1. \tag{4.1.11}$$

(iii) Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την $|D_n(y)|$ είναι:

$$|D_n(y)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}|e^{iky}| = \frac{2n+1}{2} = n+\frac{1}{2} \tag{4.1.12}$$

με ισότητα όταν $y=0$, και

$$|D_n(y)| = \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{y}{2}} \leqslant \frac{\pi}{2y}, \qquad 0<y<\pi, \tag{4.1.13}$$

η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ για κάθε $t\in(0,\pi/2)$. Αφού η D_n είναι άρτια, συμπεραίνουμε ότι

$$|D_n(y)| \leqslant \frac{\pi}{2|y|}, \qquad 0<|y|<\pi. \tag{4.1.14}$$

Ορισμός 4.1.10. Για κάθε $n\geqslant 1$ ορίζουμε

$$D_n^*(y) = \frac{D_{n-1}(y)+D_n(y)}{2}, \qquad y\in\mathbb{T}. \tag{4.1.15}$$

Πρατηρήστε ότι

$$D_n^*(y) = \frac{1}{2\sin\frac{y}{2}}\Big(\sin\big(n-\frac{1}{2}\big)y + \sin\big(n+\frac{1}{2}\big)y\Big) = \frac{\sin(ny)}{2\tan\frac{y}{2}}. \tag{4.1.16}$$

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$ θέτουμε

$$s_n^*(f,t) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)D_n^*(t-x)\,dx. \tag{4.1.17}$$

Δεδομένου ότι

$$D_n(y) - D_n^*(y) = \frac{D_n(y) - D_{n-1}(y)}{2} = \frac{e^{iny}+e^{-iny}}{4} = \frac{\cos(ny)}{2}, \tag{4.1.18}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$s_n(f,t) = s_n^*(f,t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\cos n(t-x)\,dx. \tag{4.1.19}$$

Λήμμα 4.1.11. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $t \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$s_n(f,t) - s_n^*(f,t) \to 0 \ \ \textit{καθώς το } n \to \infty.$$

Απόδειξη. Λόγω της (4.1.19) αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\cos n(t-x)\,dx = \cos(nt)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\cos(nx)\,dx + \sin(nt)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\sin(nx)\,dx \to 0,$$

το οποίο ισχύει από το λήμμα Riemann-Lebesgue. □

Παρατήρηση 4.1.12. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\phi(y) = \frac{1}{2\tan\frac{y}{2}} - \frac{1}{y}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\lim_{y\to 0}\phi(y)$ υπάρχει, άρα $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Αν λοιπόν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $f\phi \in L^1(\mathbb{T})$, και από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\phi(t-x)\sin n(t-x)\,dx \to 0.$$

Έπεται ότι

$$s_n^*(f,t) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\phi(t-x)\sin n(t-x)\,dx \to 0.$$

Από το Λήμμα 4.1.11 καταλήγουμε στην

$$s_n(f,t) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dx \to 0. \tag{4.1.20}$$

Παρατήρηση 4.1.13. Αφού $D_n^* = \frac{1}{2}(D_{n-1} + D_n)$, οι βασικές ιδιότητες της D_n^* προκύπτουν άμεσα από αυτές της D_n. Έχουμε ότι η D_n^* είναι άρτια συνάρτηση, και

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n^*(y)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n^*(y)\,dy = 1 \tag{4.1.21}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την $|D_n^*(y)|$ είναι:

$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{1}{2}(|D_{n-1}(y)| + |D_n(y)|) \leqslant \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2} + n + \frac{1}{2}\right) = n \tag{4.1.22}$$

με ισότητα όταν $y = 0$, και

$$|D_n(y)| \leqslant \frac{\pi}{2|y|}, \qquad 0 < |y| < \pi. \tag{4.1.23}$$

4.1β′ Θεώρημα Dini και θεώρημα Marcinkiewicz

Το θεώρημα Dini μας δίνει μια ικανή συνθήκη για την σύγκλιση της σειράς Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε δεδομένο σημείο.

Θεώρημα 4.1.14 (Dini)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $t \in \mathbb{T}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha \in \mathbb{C}$ ώστε*

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(t+x) + f(t-x)}{2} - \alpha \right| \frac{dx}{x} < \infty. \tag{4.1.24}$$

Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,t) = \alpha. \tag{4.1.25}$$

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 4.1.11 αρκεί να δείξουμε ότι

$$s_n^*(f,t) - \alpha \to 0.$$

Αφού

$$s_n^*(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-x)\frac{\sin(nx)}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(t+x)+f(t-x)}{2}\,\frac{\sin(nx)}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx$$

και

$$\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha D_n^*(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha\frac{\sin(nx)}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx,$$

έχουμε

$$s_n^*(f,t) - \alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - \alpha\right)\frac{\sin(nx)}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$F_t(x) := \left(\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - \alpha\right)\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}$$

γράφεται στη μορφή

$$F_t(x) = A_t(x) + B_t(x) := \left(\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - \alpha\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - \alpha\right)\phi(x),$$

όπου $\phi(x) = \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}$. Έχουμε δει ότι $\phi \in L^\infty$, άρα η B_t είναι ολοκληρώσιμη (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση, η A_t είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, $F_t \in L^1$ και έπεται ότι

$$s_n^*(f,t) - \alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_t(x)\sin(nx)\,dx \to 0$$

από το λήμμα Riemann-Lebesgue. □

Παρατηρήσεις 4.1.15. (α) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(t+0) = \lim_{x\to t^+} f(x) \quad \text{και} \quad f(t-0) = \lim_{x\to t^-} f(x).$$

Αν η (4.1.24) ικανοποιείται για κάποιον α, τότε έχουμε αναγκαστικά

$$\alpha = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}.$$

Πράγματι, αν είχαμε $\left|\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} - \alpha\right| = r > 0$, τότε θα υπήρχε $\delta \in (0,\pi)$ ώστε: αν $0 < x < \delta$ τότε

$$\left|\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - \alpha\right| \geqslant \frac{r}{2}.$$

Όμως τότε θα είχαμε

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - \alpha\right| \frac{dx}{x} \geqslant \int_0^\delta \frac{r}{2x}\,dx = \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο t και αν ικανοποιείται η (4.1.24) τότε έχουμε αναγκαστικά $\alpha = f(t)$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο t. Τότε, η συνάρτηση

$$x \mapsto \frac{f(t+x)-f(t)}{x}$$

είναι φραγμένη σε μια περιοχή του 0. Άρα, υπάρχουν $\delta \in (0,\pi)$ και $M > 0$ ώστε: αν $0 < |x| < \delta$ τότε $|f(t+x) - f(t)| \leqslant M|x|$. Δηλαδή, για κάθε $0 < x < \delta$,

$$\left|\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - f(t)\right| \leqslant \frac{1}{2}\Big[|f(t+x)-f(t)| + |f(t-x)-f(t)|\Big] \leqslant Mx.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - f(t)\right| \frac{dx}{x} \leqslant \int_0^\delta Mx\,\frac{dx}{x} = M\delta < \infty,$$

και

$$\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2}-f(t)\right|\frac{dx}{x}\leqslant\frac{1}{\delta}\int_{0}^{\pi}\left|\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2}-f(t)\right|dx<\infty$$

(εξηγήστε γιατί), άρα η (4.1.24) ικανοποιείται με $\alpha=f(t)$. Έτσι έχουμε το εξής:

Θεώρημα 4.1.16. *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $t\in\mathbb{T}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty}s_n(f,t)=f(t). \tag{4.1.26}$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ένα απλό κριτήριο που εξασφαλίζει ότι $s_n(f,t)\to f(t)$ σχεδόν παντού.

Θεώρημα 4.1.17 (Marcinkiewicz). *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Για καθε $x\in\mathbb{T}$ ορίζουμε*

$$w_1(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t+x)-f(t)|\,dt.$$

Αν

$$\int_0^{\pi}w_1(f,x)\frac{dx}{x}<\infty,$$

τότε $s_n(f,t)\to f(t)$ σχεδόν παντου στο $\mathbb{T}$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_0^{\pi}|f(t+x)-f(t)|\,\frac{dx}{x}\right)dt&=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t+x)-f(t)|\,dt\right)\frac{dx}{x}\\&=\int_0^{\pi}w_1(f,x)\,\frac{dx}{x}<\infty.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{\pi}|f(t+x)-f(t)|\,\frac{dx}{x}<\infty$$

σχεδόν για κάθε $t\in\mathbb{T}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}w_1(f,-x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t-x)-f(t)|\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}-x}|f(s)-f(s+x)|\,ds\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}-x}|f(s+x)-f(s)|\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(s+x)-f(s)|\,ds\\&=w_1(f,x).\end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας τον αρχικό υπολογισμό βλέπουμε τώρα ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_0^{\pi}|f(t-x)-f(t)|\,\frac{dx}{x}\right)dt=\int_0^{\pi}w_1(f,-x)\,\frac{dx}{x}<\infty,$$

άρα

$$\int_0^{\pi}|f(t-x)-f(t)|\,\frac{dx}{x}<\infty$$

σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{T}$. Τώρα,

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(t+x)+f(t-x)}{2} - f(t) \right| \frac{dx}{x} < \infty$$

σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{T}$, και από το θεώρημα Dini έπεται ότι $s_n(f,t) \to f(t)$ σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{T}$. □

4.2 Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που η σειρά Fourier τους αποκλίνει σε κάποιο σημείο. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη είναι έμμεση και χρησιμοποιεί την αρχή ομοιόμορφου φράγματος (θεώρημα Banach-Steinhaus) ενώ η δεύτερη είναι κατασκευαστική.

Ορισμός 4.2.1 (σταθερές Lebesgue)**.** Για κάθε $n \geqslant 0$, η n-οστή σταθερά Lebesgue L_n ορίζεται ως εξής:

$$L_n = 2\|D_n\|_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(y)|\, dy. \tag{4.2.1}$$

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε $\|f\|_\infty \leqslant 1$ και*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \operatorname{sign} D_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2n+1},$$

όπου $\operatorname{sign} u$ είναι το πρόσημο του u (και $\operatorname{sign} 0 = 0$). Συνεπώς,

$$\sup_{f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1} |s_n(f,0)| = L_n.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)|\, dx < \delta.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{sign} D_n(x)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, όσα είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει πρόσημο η D_n) και $\|g\|_\infty = 1$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε $\|f\|_\infty \leqslant 1$ και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \operatorname{sign} D_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2n+1}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|s_n(f,0)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(y)D_n(-y)\,dy\right| \\
&\geqslant \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{sign} D_n(y)D_n(-y)\,dy\right| - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y)-g(y)||D_n(-y)|\,dy \\
&\geqslant \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{sign} D_n(y)D_n(y)\,dy\right| - \frac{2\varepsilon\|D_n\|_\infty}{2n+1} \\
&\geqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(y)|\,dy - \varepsilon,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η D_n, άρα και η $\operatorname{sign} D_n$, είναι άρτια, καθώς και την $\|D_n\|_\infty = n + \frac{1}{2}$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $|s_n(f,0)| \geqslant L_n - \varepsilon$.

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$ έχουμε

$$|s_n(f,0)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\,|D_n(y)|\,dy \leqslant \|2D_n\|_1\|f\|_\infty \leqslant L_n,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πρόταση 4.2.3. *Ισχύει*

$$L_n \sim \frac{4\ln n}{\pi^2}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Σημείωση. Ο συμβολισμός $a_n \sim b_n$ σημαίνει ότι η ακολουθία $\{a_n - b_n\}$ είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε $|a_n - b_n| \leqslant A$ για κάθε n. Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε την ίδια ιδιότητα είναι να γράψουμε $a_n - b_n = O(1)$. Γράφοντας $a_n = b_n + o(1)$ εννοούμε ότι $a_n - b_n \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Απόδειξη. Αφού η D_n είναι άρτια και $\sin\frac{t}{2} > 0$ στο $(0,\pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin((n+1/2)t)| \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right) dt \\
+ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin((n+1/2)t)|\,\frac{1}{t}\,dt = A_n + B_n.
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι φραγμένος: αφού η $\phi(t) = \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)$ είναι φραγμένη, έχουμε $A_n = O(1)$. Για τον δεύτερο όρο, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \left(n + \frac{1}{2}\right) t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi+\pi/2} |\sin s|\,\frac{ds}{s} = \frac{2}{\pi}\int_\pi^{n\pi} |\sin s|\,\frac{ds}{s} + O(1) \\
&= C_n + O(1),
\end{aligned}$$

αφού, λόγω της $\lim_{s\to 0^+} \frac{\sin s}{s} = 1$, έχουμε

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s}\, ds = O(1) \quad \text{και} \quad \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2} \frac{|\sin s|}{s}\, ds \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$C_n := \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} |\sin s|\, \frac{ds}{s} = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1). \tag{4.2.2}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin s|}{s}\, ds \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(k\pi+t)|}{k\pi+t}\, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t}\, dt. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in (0,\pi)$,

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leqslant \frac{1}{k\pi+t} \leqslant \frac{1}{k\pi},$$

άρα

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t} \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Τα δύο αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}$ και $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ είναι $\ln n + O(1)$. Αφού $\int_0^{\pi}\sin t\, dt = 2$, καταλήγουμε στην

$$C_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα 4.2.4. *Για κάθε $f \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$ και $n \geqslant 2$ ισχύει*

$$|s_n(f,t)| \leqslant C(\ln n)\, \|f\|_{\infty},$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} |s_n(f,t)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t-x)|\, |D_n(x)|\, dx\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f\|_{\infty}|D_n(x)|\, dx \\ &= 2\|D_n\|_1\|f\|_{\infty} \leqslant C\cdot\ln n\, \|f\|_{\infty} \end{aligned}$$

διότι $2\|D_n\|_1 = L_n \leqslant C\cdot\ln n$ από την Πρόταση 4.2.3. □

Από το Λήμμα 4.2.2 και την Πρόταση 4.2.3, για κάθε n υπάρχει $f_n \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$|s_n(f_n, 0)| \sim L_n \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει *μία* $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\sup_n |s_n(f, 0)| = +\infty.$$

Ειδικότερα, η f έχει σειρά Fourier η οποία αποκλίνει στο σημείο 0. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus. Για λόγους πληρότητας δίνουμε την (σχετικά απλή) απόδειξή του, η οποία βασίζεται στο θεώρημα Baire.

Πρόταση 4.2.5. *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{x \in X : \text{ για κάθε } f \in \mathcal{F}, \ |f(x)| \leqslant m\}.$$

Κάθε A_m είναι κλειστό υποσύνολο του X: αν $x_k \in A_m$ και $x_k \to x$ τότε, για κάθε $f \in \mathcal{F}$ έχουμε $|f(x_k)| \leqslant m$ και, από τη συνέχεια των $f \in \mathcal{F}$ παίρνουμε $f(x_k) \to f(x)$ καθώς $k \to \infty$, άρα, για κάθε $f \in \mathcal{F}$ έχουμε $|f(x)| \leqslant m$, δηλαδή $x \in A_m$.

Παρατηρήστε ότι $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση, το $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M_x > 0$ ώστε, για κάθε $f \in \mathcal{F}$, $|f(x)| \leqslant M_x$. Υπάρχει $m = m(x) \in \mathbb{N}$ με $m \geqslant M_x$. Τότε, $x \in A_m$.

Ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το θεώρημα Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στην $B(x_0, r)$: για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$ ισχύει $|f(x)| \leqslant m_0$. $\square$

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια οικογένεια $\mathcal{F}$ φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$ που έχουν την ιδιότητα το $\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ να είναι φραγμένο στον Y για κάθε $x \in X$. Αν ο X είναι πλήρης, η γραμμικότητα των $T \in \mathcal{F}$ και η απλή ιδέα της απόδειξης της Πρότασης 4.2.5 μας δίνουν ότι οι νόρμες $\|T\|$, $T \in \mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες:

Θεώρημα 4.2.6 (αρχή ομοιόμορφου φράγματος, Banach-Steinhaus)**.** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < +\infty.$$

Τότε, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\text{για κάθε } T \in \mathcal{F}, \quad \|T\| \leqslant M.$$

Απόδειξη. Για κάθε $T \in \mathcal{F}$ ορίζουμε $f_T : X \to \mathbb{R}$ με $f_T(x) = \|T(x)\|$. Κάθε f_T είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Αν $x, y \in X$, τότε

$$|f_T(x) - f_T(y)| = |\,\|T(x)\| - \|T(y)\|\,| \leqslant \|T(x) - T(y)\| \leqslant \|T\|\,\|x - y\|.$$

Από την υπόθεσή μας για την $\mathcal{F}$ βλέπουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$\sup\{|f_T(x)| : T \in \mathcal{F}\} = \sup\{\|T(x)\| : T \in \mathcal{F}\} < +\infty$$

δηλαδή το σύνολο $\{f_T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ είναι φραγμένο.

Από την Πρόταση 4.2.5 υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $T \in \mathcal{F}$,

$$|f_T(x)| = \|T(x)\| \leqslant M_1.$$

Έστω $x \in B_X$. Τότε, για κάθε $T \in \mathcal{F}$ έχουμε $\|T(x_0 + (r/2)x)\| \leqslant M_1$ και $\|T(x_0)\| \leqslant M_1$ (γιατί $x_0, x_0 + (r/2)x \in B(x_0, r)$). Άρα, για κάθε $T \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \frac{2}{r}\|T((r/2)x)\| = \frac{2}{r}\|T(x_0 + (r/2)x) - T(x_0)\|\\ &\leqslant \frac{2}{r}\left(\|T(x_0 + (r/2)x)\| + \|T(x_0)\|\right) \leqslant \frac{4M_1}{r}.\end{aligned}$$

Αφού το $x \in B_X$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\|T\| \leqslant M := 4M_1/r$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$. □

Θεώρημα 4.2.7. *Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε*

$$\sup_n |s_n(f, 0)| = +\infty.$$

Απόδειξη. Για κάθε n θεωρούμε τον τελεστή $T_n : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ με

$$T_n(f) = s_n(f, 0).$$

Κάθε T_n είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$\|T_n\| = \sup\{|s_n(f, 0)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1\} = L_n.$$

Από την Πρόταση 4.2.3 έχουμε

$$\sup_n \|T_n\| = \sup_n L_n = +\infty.$$

Ο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Banach-Steinhaus βλέπουμε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\sup_n |T_n(f)| = +\infty.$$

Δηλαδή, $\sup_n |s_n(f, 0)| = +\infty$. Ειδικότερα, η σειρά Fourier της f αποκλίνει στο σημείο 0. □

4.2α′ Μια κατασκευή του Lebesgue

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια κατασκευαστική απόδειξη της ύπαρξης συνεχούς $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ για την οποία
$$\limsup_{n\to\infty} |s_n(f,0)| = \infty.$$
Το επιχείρημα οφείλεται στον Lebesgue. Στην Παρατήρηση 4.1.12 είδαμε ότι, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$,

$$s_n(f,t) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dx \to 0. \tag{4.2.3}$$

Θα ορίσουμε μια άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, θέτοντας

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(n_k t)\chi_{I_k}(t), \qquad 0 < t < \pi,$$

όπου $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών που θα επιλεγεί κατάλληλα, χ_{I_k} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $I_k = \left(\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}\right]$, και $\{c_k\}$ είναι μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που θα επιλεγεί κατάλληλα. Επειδή τα διαστήματα I_k έχουν ξένους φορείς, αυτό που περιμένουμε από την (4.2.3) είναι ότι, αν επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους, ο βασικός όρος στο μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f,0)$ θα είναι ο k-οστός, δηλαδή ο $c_k \sin(n_k t)\chi_{I_k}(t)$.

Αρχικά ορίζουμε $c_1 = 1$, $n_1 = 2$ και $I_1 = (\pi/2, \pi]$. Στο I_1 έχουμε

$$f(t) = c_1 \sin(n_1 t).$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$, τους $c_1, \ldots, c_{k-1}$, και τα διαστήματα I_j, $j = 1, \ldots, k-1$. Ορίζουμε

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j \sin(n_j t)\chi_{I_j}(t) \quad \text{αν } t \in (\pi/n_{k-1}, \pi]$$

και $\phi(t) = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι η $t \mapsto \phi(t)/t$ είναι φραγμένη: πράγματι, η ϕ μηδενίζεται στο $[0, \pi/n_{k-1}]$, άρα
$$|\phi(t)| \leqslant c_1 \leqslant \frac{c_1 n_{k-1}}{\pi} t.$$
Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\,\sin(nt)\,dt = 0.$$

Ορίζουμε $n_k = n_{k-1}N_k$, όπου ο $N_k \geqslant 2^k$ είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ισχύει

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\,\sin(n_k t)\,dt\right| < 1. \tag{4.2.4}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $I_k = (\pi/n_k, \pi/n_{k-1}]$ και ορίζουμε $f(t) = c_k \sin(n_k t)$ στο I_k, όπου $0 < c_k < c_{k-1} < 1$ τον οποίο θα επιλέξουμε. Για να εκτιμήσουμε το μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f,0)$ αρκεί, από την (4.2.3), να εκτιμήσουμε το

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(n_k t)\frac{dt}{t} &= \frac{2}{\pi}\left(\int_{(0,\pi/n_k]} + \int_{(\pi/n_k,\pi/n_{k-1}]} + \int_{(\pi/n_{k-1},\pi]}\right)\\ &=: A_k + B_k + C_k.\end{aligned}$$

Από την (4.2.4) βλέπουμε ότι $C_k = O(1)$: στο $(\pi/n_{k-1}, \pi]$ έχουμε $f(t) = \phi(t)$, άρα

$$\left|\int_0^\pi f(t)\sin(n_k t)\frac{dt}{t}\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t}\,\sin(n_k t)\,dt\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Επίσης, ανεξάρτητα από τον τρόπο επιλογής των c_k, από την $\sin y \leqslant y$ στο $(0,\pi)$ και την $0 < c_k \leqslant 1$ έχουμε

$$|A_k| \leqslant \int_{(0,\pi/n_k]} |\sin(n_k t)|\frac{dt}{t} \leqslant n_k\frac{\pi}{n_k} = \pi.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}B_k &= c_k\int_{I_k}(\sin n_k t)^2\frac{dt}{t} = c_k\int_{I_k}\frac{1-\cos(2n_k t)}{2t}\,dt\\ &= \frac{c_k}{2}\int_{I_k}\frac{dt}{t} - \frac{c_k}{2}\int_{I_k}\cos(2n_k t)\frac{dt}{t}\\ &=: B_k' - B_k''.\end{aligned}$$

Για τον B_k' έχουμε

$$B_k' = \frac{c_k}{2}\int_{I_k}\frac{dt}{t} = \frac{c_k}{2}\ln\left(\frac{n_k}{n_{k-1}}\right) = \frac{c_k}{2}(\ln N_k).$$

Επιλέγοντας $c_k = (\ln N_k)^{-\epsilon}$, όπου $0 < \epsilon < 1$, έχουμε $c_k \to 0$ και

$$B_k' = \frac{1}{2}(\ln N_k)^{1-\epsilon} \to \infty$$

καθώς το $k \to \infty$. Το ολοκλήρωμα στον όρο B_k'' ισούται με

$$\int_{I_k}\cos(2n_k t)\frac{dt}{t} = \frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} + \int_{I_k}\frac{\sin(2n_k t)}{2n_k}\,\frac{dt}{t^2}.$$

Από την επιλογή των n_k έχουμε ότι

$$\frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} - \frac{\sin(2\pi N_k)}{2\pi N_k} = 0.$$

Επίσης,

$$\left|\int_{I_k}\frac{\sin(2n_k t)}{2n_k}\,\frac{dt}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n_k}\int_{\pi/n_k}^\infty\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2n_k}\,\frac{n_k}{\pi} = \frac{1}{2\pi} = O(1).$$

Συγκεντρώνοντας όλες τις εκτιμήσεις μας, βλέπουμε ότι

$$s_{n_k}(f,0) = \frac{1}{2}(\ln N_k)^{1-\epsilon} + O(1),$$

απ' όπου έπεται ότι $s_{n_k}(f,0) \to \infty$.

4.3 Στοιχειώδεις ιδιότητες των σειρών Fourier

Κλείνουμε αυτό το Κεφάλαιο με κάποιες απλές και χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιούμε συχνά στα επόμενα. Κάποιες πολύ στοιχειώδεις ιδιότητες είναι οι εξής:

(i) Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ τότε

$$c_k(f + \alpha\overline{g}) = c_k(f) + \alpha\,\overline{c_{-k}(g)}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f_\alpha(t) = f(t+\alpha)$, τότε

$$c_k(f_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t+\alpha)e^{-ikt}dt = e^{ik\alpha}c_k(f)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$ και $g_n(t) = f(t)e^{int}$, τότε

$$c_k(g_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{int}e^{-ikt}dt = c_{k-n}(f).$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Οι επόμενες προτάσεις δίνουν τους συντελεστές Fourier των συναρτήσεων που προκύπτουν αν ολοκληρώσουμε ή παραγωγίσουμε μια συνάρτηση ή αν πάρουμε την συνέλιξη δύο συναρτήσεων.

Πρόταση 4.3.1. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω F το αόριστο ολοκλήρωμα της f:*

$$F(t) = c + \int_0^t f(s)\,ds, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Τότε,

$$c_k(F - c_0(f)t) = \frac{c_k(f)}{ik}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε αρχικά ότι

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx = 2\pi c_0(f).$$

Άρα, αν $c_0(f) \neq 0$ τότε η F δεν είναι 2π-περιοδική. Γι' αυτόν τον λόγο θεωρούμε την συνάρτηση $G(t) = F(t) - c_0(f)t$. Η G είναι 2π-περιοδική, απολύτως συνεχής, και $G'(t) = f(t) - c_0(f)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Για κάθε $k \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} c_k(G) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} G(t)e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{G(t)e^{-ikt}}{-ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(ik)}\int_{\mathbb{T}}(f(t) - c_0(f))e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{(ik)}c_k(f). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.3.2. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν η f είναι απολύτως συνεχής, τότε*

$$c_k(f') = (ik)c_k(f)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και $\lim_{|k|\to\infty}[kc_k(f)] = 0$. Δηλαδή, $c_k(f) = o(1/|k|)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$f(t) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{t} f'(x)\,dx$$

διότι η f είναι απολύτως συνεχής. Κατόπιν, εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.3.1.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $c_k(f') \to 0$ όταν $|k| \to \infty$, το οποίο έπεται από το λήμμα Riemann-Lebesgue αφού $f' \in L^1(\mathbb{T})$. □

Πόρισμα 4.3.3. *Έστω $f \in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,*

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και $\lim_{|k|\to\infty}[k^m c_k(f)] = 0$. Δηλαδή, $c_k(f) = o(1/|k|^m)$.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.3.2, την οποία εφαρμόζουμε, διαδοχικά, m φορές. □

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Αν $f * g$ είναι η συνέλιξη των f και g, η οποία ορίζεται μέσω της*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)\,dt,$$

τότε

$$c_k(f * g) = c_k(f)c_k(g)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Στο Κεφάλαιο 1 είδαμε ότι η $f * g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$, είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, και $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubibi γράφουμε

$$\begin{aligned}
c_k(f * g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)\,dt\right) e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-ikt} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)e^{-k(x-t)}dx\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-ikt}c_k(f)\,dt \\
&= c_k(f)c_k(g).
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.3.5. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν $p(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(p)e^{ikt}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N τότε η συνέλιξη $f * p$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από N, το οποίο δίνεται από την*

$$(f * p)(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)c_k(p)e^{ikt}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(f * p)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)p(t-x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\sum_{k=-N}^{N} c_k(p)e^{ik(t-x)}\,dx \\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(p)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}\,dx\right)e^{ikt} \\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)c_k(p)e^{ikt},\end{aligned}$$

άρα η $f * g$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από N. □

Κεφάλαιο 5

Αθροισιμότητα σειρών Fourier

5.1 Cesàro αθροισιμότητα

Ορισμός 5.1.1. Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Λέμε ότι η $\{c_k\}$ συγκλίνει **κατά Cesàro** στον $\ell \in \mathbb{C}$ αν η ακολουθία

$$C_k := \frac{c_1 + \cdots + c_k}{k} \to \ell$$

καθώς το $k \to \infty$.

Πρόταση 5.1.2. *Αν* $\lim_{k\to\infty} c_k = \ell$ *τότε η* $\{c_k\}$ *συγκλίνει κατά Cesàro στον* ℓ.

Απόδειξη. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $c_k \to 0$ και δείχνουμε ότι $C_k \to 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_1$ ισχύει $|c_k| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $k > k_1$ έχουμε

$$|C_k| \leqslant \frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} + \frac{k - k_1}{k}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ο $A := |c_1 + \cdots + c_{k_1}|$ εξαρτάται από το ε. Επιλέγουμε $k_2(A) = k_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_2$,

$$\frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} = \frac{A}{k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν θέσουμε $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ τότε, για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$|C_k| \leqslant \frac{A}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Άρα, $C_k \to 0$.

Για την γενική περίπτωση εφαρμόζουμε το προηγούμενο στην ακολουθία $c'_k := c_k - \ell$. □

Παρατήρηση 5.1.3. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η ακολουθία $c_k = 1 + (-1)^k$ αποκλίνει, αλλά συγκλίνει κατά Cesàro στο 1.

Ορισμός 5.1.4. Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \quad \text{και} \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k.$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει **κατά Cesàro** στον $s \in \mathbb{C}$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s.$$

Παρατήρηση 5.1.5. Από την Πρόταση 5.1.2 έπεται ότι: αν $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ τότε $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον s.

Από την άλλη πλευρά, αν $z \neq 1$, $|z| = 1$, και αν ορίσουμε $c_k = z^k$, $k \geqslant 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ αποκλίνει διότι $c_k \not\to 0$, όμως

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον $\frac{1}{1-z}$.

5.2 Ο πυρήνας του Fejér

Ορισμός 5.2.1 (Cesàro μέσοι)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν $c_k = c_k(f)$ είναι οι συντελεστές Fourier της f, το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f ορίστηκε ως εξής:

$$s_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}.$$

Ο n-οστός Cesàro μέσος της σειράς Fourier της f ορίζεται από την

$$\sigma_n(f,t) = \frac{s_0(f,t) + s_1(f,t) + \cdots + s_n(f,t)}{n+1}, \qquad n \geqslant 0.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την $\sigma_n(f,t)$ σε κλειστή μορφή, γράφοντας

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} s_m(f,t) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} c_k(f)e^{ikt} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(\sum_{m=|k|}^{n} \mathbf{1}\right) c_k(f)e^{ikt} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}(n+1-|k|)c_k(f)e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)c_k(f)e^{ikt}.\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$s_m(f,t) = (f * 2D_m)(t)$$

όπου D_m είναι ο m-οστός πυρήνας του Dirichlet, μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}(f * 2D_m)(t) = \left(f * \frac{2D_0 + 2D_1 + \cdots + 2D_n}{n+1}\right)(t).$$

Ορισμός 5.2.2 (πυρήνας Fejér)**.** Ο n-οστός πυρήνας του Fejér είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} D_m(t).$$

Παρατηρήστε ότι

$$K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikt}.$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τον K_n σε κλειστή μορφή, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$D_m(t) = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Γράφουμε

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{m=0}^{n} e^{i(m+1/2)t}\right)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(\sum_{m=0}^{n} e^{i(m+1/2)t}\right) &= \mathrm{Im}\left(e^{it/2}\sum_{m=0}^{n} e^{imt}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)t}}{e^{-it/2}(1-e^{it})}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{e^{-i(n+1)t/2}-e^{i(n+1)t/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}\right)\\
&= \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\,\mathrm{Im}\left(e^{i(n+1)t/2}\right)\\
&= \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε το εξής:

Λήμμα 5.2.3. *Για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $t \in T$,*

$$K_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikt},$$

και

$$K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2.$$

Παρατηρήσεις 5.2.4. Από το Λήμμα 5.2.3 είναι φανερό ότι ο πυρήνας του Fejér K_n είναι μη αρνητική άρτια συνάρτηση. Λόγω της $K_n(-t) = K_n(t)$, έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\,dt = 1.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} K_n(t) &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}|D_m(t)| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left(m+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $0<|t|<\pi$ έχουμε

$$K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2(n+1)}\,\frac{1}{(t/\pi)^2} = \frac{\pi^2}{2(n+1)t^2}.$$

Για τους Cesàro μέσους $\sigma_n(f,x)$ θα χρησιμοποιούμε συχνά την αναπαράσταση

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)K_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right)K_n(t)\,dt$$

ή την

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)K_n(t)\,dt.$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι η K_n είναι άρτια συνάρτηση (με απλές αλλαγές μεταβλητής).

Θεώρημα 5.2.5 (Fejér)**.** *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $x\in\mathbb{T}$. Αν τα πλευρικά όρια $f(x+0)$ και $f(x-0)$ υπάρχουν, τότε*

$$\sigma_n(f,x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

καθώς το $n\to\infty$. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I\subset\mathbb{T}$, τότε $\sigma_n(f,x)\to f(x)$ ομοιόμορφα στο I.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sigma_n(f,x)-f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)K_n(t)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)K_n(t)dt. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε $|f(x+t)-f(x+0)|<\varepsilon$ και $|f(x-t)-f(x-0)|<\varepsilon$ για κάθε $t\in(0,\delta)$. Άρα,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)K_n(t)dt\right| \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2} + \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2}\right)K_n(t)dt \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\varepsilon\,K_n(t)\,dt \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Στο (δ,π) έχουμε
$$K_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2}.$$
Συνεπώς,
$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi \left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)K_n(t)dt\right| \\
&\qquad\leqslant \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2}\frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi\left(\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2}+\frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2}\right)dt \\
&\qquad\leqslant \frac{M(f)}{(n+1)\delta^2}\to 0
\end{aligned}$$
καθώς το $n\to\infty$. Άρα,
$$\limsup_{n\to\infty}(\sigma_n(f,x)-f(x))\leqslant\varepsilon$$
και έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I\subset\mathbb{T}$, από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο I βλέπουμε ότι η επιλογή του δ στο παραπάνω επιχείρημα είναι ανεξάρτητη από το $x\in I$ (εξαρτάται μόνο από το ε), άρα $\sigma_n(f,x)\to f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ομοιόμορφα στο I. □

Ένα πόρισμα του Θεωρήματος 5.2.5 είναι η πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $(C(\mathbb{T}),\|\cdot\|_\infty)$ και στον $(L^1(\mathbb{T}),\|\cdot\|_1)$ που είχε χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του λήμματος Riemann-Lebesgue.

Θεώρημα 5.2.6. *Για κάθε $g\in C(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε*
$$\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon.$$
Επίσης, για κάθε $1\leqslant p<\infty$, για κάθε $f\in L^p(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε
$$\|f-q_\varepsilon\|_p<\varepsilon.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η $\sigma_n(g)=g*2K_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, ως συνέλιξη μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης με το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $2K_n$. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $\sigma_n(g)\to g$ ομοιόμορφα, διότι η g είναι συνεχής. Δηλαδή, $\|g-\sigma_n(g)\|_\infty\to 0$. Για το τυχόν λοιπόν $\varepsilon>0$ έχουμε
$$\|g-\sigma_n(g)\|_\infty<\varepsilon$$
αν το n είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό.

Για τον δεύτερο, έστω $f\in L^p(\mathbb{T})$ και $\varepsilon>0$. Μπορούμε να βρούμε $g\in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f-g\|_p<\varepsilon/2$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε $\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon/2$. Αφού
$$\|g-q_\varepsilon\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(x)-q_\varepsilon(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon/2,$$
ο ισχυρισμός έπεται από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$. □

Παρατήρηση 5.2.7. Για κάθε n ορίζουμε $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ και $K_{\delta_n} = 2K_n$. Η οικογένεια $\{K_{\delta_n}\}$ είναι προσέγγιση της μονάδας (στο $\mathbb{T}$). Πράγματι, για κάθε n ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_{\delta_n}(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)dt = 1.$$

Επίσης,

$$|K_{\delta_n}(t)| = 2K_n(t) \leqslant 2\frac{n+1}{2} = \frac{1}{\delta_n}$$

και, για κάθε $0 < |t| < \pi$, έχουμε

$$|K_{\delta_n}(t)| = 2K_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{(n+1)t^2} = \frac{\pi^2\delta_n}{t^2}.$$

Από τα αποτελέσματα της Παραγράφου 2.4 (ή μια απλή παραλλαγή της απόδειξής τους) έχουμε το εξής θεώρημα που «συμπληρώνει» το Θεώρημα 5.2.5:

Θεώρημα 5.2.8. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$ ισχύει $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα, $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.* □

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην L^p-σύγκλιση των Cesàro μέσων $\sigma_n(f)$ στην f.

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f) - f\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f,x) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x))K_n(t)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} K_n(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p K_n(t)\,dt,
\end{aligned}$$

όπου $f_t(x) = f(x+t)$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Minkowski

$$\left\|\int_{\mathbb{T}} G(x,t)d\nu(t)\right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant \int_{\mathbb{T}} \|G(x,t)\|_{L^p(\mathbb{T})} d\nu(t)$$

για την $G(x,t) = f(x+t) - f(x)$, με $d\nu(t) = \frac{1}{\pi}K_n(t)\,dt$ (το γεγονός ότι το ν είναι μη αρνητικό έπεται από το ότι $K_n \geqslant 0$, παρατηρήστε επίσης ότι $G \in L^p$).

Ορίζουμε $F(t) = \|f_t - f\|_p$. Γνωρίζουμε ότι η F είναι συνεχής στο 0, άρα

$$\sigma_n(F,0) \to F(0) = 0 \text{ καθώς το } n \to \infty.$$

Όμως,

$$\sigma_n(F,0) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} F(t)K_n(-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} F(t)K_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p K_n(t)\,dt,$$

άρα

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \leqslant \sigma_n(F,0)$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 5.2.9 έχει ως συνέπεια το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 5.2.6. Δείχνει επίσης ότι η απεικόνιση $f \mapsto \{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι 1-1.

Θεώρημα 5.2.10 (μοναδικότητα). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν $c_k(f) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.*

Απόδειξη. Αφού $c_k(f) = 0$ για κάθε k, έχουμε

$$\sigma_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)c_k(f)e^{ikt} = 0$$

για κάθε n, δηλαδή $\sigma_n(f) \equiv 0$. Από το Θεώρημα 5.2.9 βλέπουμε ότι

$$\|f\|_p = \|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0.$$

Άρα, $\|f\|_p = 0$ και αυτό δείχνει ότι $f \equiv 0$. □

5.3 Χαρακτηρισμός των τριγωνομετρικών σειρών που είναι σειρές Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε αν υπάρχουν κάποια απλά κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν να δούμε αν κάποια τριγωνομετρική σειρά είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{T})$. Θεωρούμε λοιπόν μια τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{5.3.1}$$

και τους Cesàro μέσους

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)c_k e^{ikt}. \tag{5.3.2}$$

της σειράς (5.3.1).

Θεώρημα 5.3.1. *Η (5.3.1) είναι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης $f \in C(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία συναρτήσεων $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $c_k(f) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε,

$$\sigma_n(t) = \sigma_n(f,t).$$

Από το Θεώρημα 5.2.5 συμπεραίνουμε ότι $\sigma_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{\sigma_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση f στο $\mathbb{T}$. Η f είναι συνεχής ως ομοιόμορφο όριο τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $n \geqslant |k|$ τότε

$$\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_n(t) e^{-ikt} dt.$$

Καθώς το $n \to \infty$ έχουμε

$$\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k \to c_k$$

και, αφού $\sigma_n \to f$ ομοιόμορφα,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_n(t) e^{-ikt} dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt = c_k(f).$$

Έπεται ότι $c_k = c_k(f)$ για κάθε k, δηλαδή η (5.3.1) είναι η σειρά Fourier της f. □

Στη συνέχεια μελετάμε την περίπτωση $1 < p < \infty$.

Θεώρημα 5.3.2. *Έστω $1 < p < \infty$. Η (5.3.1) είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{T})$. Δηλαδή, αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|\sigma_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f)\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f,x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x+t) K_n(t)\, dt\right|^p dx\right)^{1/p} \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t)|^p\, dx\right)^{1/p} K_n(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f_t\|_p K_n(t)\, dt, \end{aligned}$$

όπου $f_t(x) = f(x+t)$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Minkowski όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.9. Αφού $\|f_t\|_p = \|f\|_p$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|\sigma_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)\, dt = \|f\|_p$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $1 < p < \infty$ και $\{f_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $L^p(\mathbb{T})$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L^p(\mathbb{T})$: αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f_{k_n}(x)h(x)\,dx \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)h(x)\,dx$$

για κάθε $h \in L^q(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Μια άμεση απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έχουμε αν σκεφτούμε ότι η μοναδιαία μπάλα B_p του $L^p(\mathbb{T})$ είναι ασθενώς συμπαγής (διότι ο L^p είναι αυτοπαθής χώρος, άρα ισοδύναμα μιλάμε για τη μοναδιαία μπάλα του $(L^q(\mathbb{T}))^*$ με την w^*-τοπολογία). Επίσης, η ασθενής τοπολογία στην B_p είναι μετρικοποιήσιμη διότι αναφερόμαστε σε διαχωρίσιμοους χώρους. Εφαρμόζουμε λοιπόν αυτό το αποτέλεσμα για την $\{f_n\}$ η οποία περιέχεται σε κάποιο πολλαπλάσιο της B_p.

Υποθέτουμε ότι η $\{\sigma_n(f)\}$ είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{T})$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $\{\sigma_{k_n}(f)\}$ της $\{\sigma_n(f)\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L^p(\mathbb{T})$: για κάθε $h \in L^q(\mathbb{T})$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,x)h(x)\,dx \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)h(x)\,dx.$$

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, παρατηρούμε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $k_n \geqslant |m|$ τότε

$$\left(1 - \frac{|m|}{k_n+1}\right) c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,t)e^{-imt}dt.$$

Καθώς το $n \to \infty$ έχουμε

$$\left(1 - \frac{|m|}{k_n+1}\right) c_m \to c_m$$

και, αφού η $t \mapsto e^{-imt}$ ανήκει στον $L^q(\mathbb{T})$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,t)e^{-imt}dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-imt}dt = c_m(g).$$

Έπεται ότι $c_m = c_m(g)$ για κάθε m, δηλαδή η (5.3.1) είναι η σειρά Fourier της g. $\square$

Κεφάλαιο 6

L^p–Σύγκλιση

6.1 Σύγκλιση στον $L^2(\mathbb{T})$

Σε αυτό το Κεφάλαιο μελετάμε την L^p-σύγκλιση των σειρών Fourier. Για κάθε $1 < p < \infty$ το ερώτημα είναι αν για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\|s_n(f) - f\|_p \to 0 \ \text{ καθώς το } \ n \to \infty. \tag{6.1.1}$$

Η περίπτωση $p = 2$ είναι η απλούστερη. Υπενθυμίζουμε ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert. Η $\|\cdot\|_2$ επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{6.1.2}$$

Λήμμα 6.1.1. *Η ακολουθία $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L^2(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. Έχουμε δεί ότι

$$\langle e^{ikx}, e^{isx}\rangle = \delta_{k,s} \tag{6.1.3}$$

για κάθε $k, s \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα 5.2.10 έχουμε ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $c_k(f) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$. Ισοδύναμα, αν $\langle f, e^{ikx}\rangle = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 1.5.19. □

Άμεσο πόρισμα της γενικής θεωρίας των χώρων Hilbert είναι τώρα το εξής.

Θεώρημα 6.1.2. *Εστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\|s_n(f) - f\|_2 \to 0 \ \text{ καθώς τπ } \ n \to \infty \tag{6.1.4}$$

και

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2. \tag{6.1.5}$$

6.2 Σύγκλιση στον $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$

Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε αν $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$ για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$, στην γενική περίπτωση $1 \leqslant p < \infty$. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η απάντηση είναι καταφατική στην περίπτωση $p = 2$. Η πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι το πρόβλημα διατυπώνεται ισοδύναμα μέσω της ακολουθίας τελεστών $f \mapsto s_n(f)$:

Πρόταση 6.2.1. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$.

(β) Υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε: για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και για κάθε $n \geqslant 0$,

$$\|s_n(f)\|_p \leqslant A_p \|f\|_p.$$

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον τελεστή $T_n : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ με $T_n(f) = s_n(f)$. Ο T_n είναι γραμμικός και, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\|T_n(f)\|_p = \|s_n(f)\|_p = \|f * 2D_n\|_p \leqslant \|2D_n\|_1 \, \|f\|_p = L_n \|f\|_p,$$

δηλαδή ο T_n είναι φραγμένος.

Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$. Από την υπόθεση $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$ έπεται ότι η $\{T_n(f)\} = \{s_n(f)\}$ είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{T})$. Δηλαδή, υπάρχει $c_f > 0$ ώστε

$$\sup_n \|T_n(f)\|_p \leqslant c_f < \infty.$$

Τώρα, εφαρμόζουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus: υπάρχει $A_p > 0$ ώστε $\sup_n \|T_n\| \leqslant A_p$. Τότε, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και για κάθε $n \geqslant 0$,

$$\|s_n(f)\|_p = \|T_n(f)\|_p \leqslant \|T_n\| \, \|f\|_p \leqslant A_p \|f\|_p.$$

(β) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο g τέτοιο ώστε $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. Από την υπόθεση, για κάθε n έχουμε

$$\|s_n(f) - s_n(g)\|_p = \|s_n(f - g)\|_p \leqslant A_p \|f - g\|_p \leqslant A_p \varepsilon.$$

Αν N είναι ο βαθμός του g τότε για κάθε $n \geqslant N$ έχουμε $s_n(g) = g$. Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant N$ έχουμε

$$\|s_n(f) - f\|_p \leqslant \|s_n(f) - s_n(g)\|_p + \|s_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p \leqslant A_p\varepsilon + 0 + \varepsilon = (A_p + 1)\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \|s_n(f) - f\|_p = 0$. $\square$

Μια συνέπεια της Πρότασης 6.2.1 είναι ότι στην περίπτωση $p = 1$ το πρόβλημά μας έχει αρνητική απάντηση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σταθερά $A_1 > 0$ με την ιδιότητα: αν $\|f\|_1 \leqslant 1$ τότε για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει

$$\|s_n(f)\|_1 \leqslant A_1.$$

Θεωρούμε τον πυρήνα του Fejér K_N. Γνωρίζουμε ότι $\|2K_N\|_1 = 1$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$, άρα

$$\|s_n(2K_N)\|_1 \leqslant A_1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_n(2K_N) = 2K_N * 2D_n = \sigma_N(2D_n).$$

Ο πυρήνας του Dirichlet D_n είναι συνεχής συνάρτηση, άρα $\sigma_N(2D_n) \to 2D_n$ ομοιόμορφα καθώς το $N \to \infty$. Έπεται ότι

$$\|2D_n\|_1 = \lim_{N\to\infty} \|\sigma_N(2D_n)\|_1 = \lim_{N\to\infty} \|s_n(2K_N)\|_1 \leqslant A_1.$$

Όμως, έχουμε δεί ότι η ακολουθία $L_n = \|2D_n\|_1 \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n \to \infty$, το οποίο είναι άτοπο. Το επιχείρημα αυτό δείχνει ότι:

Πρόταση 6.2.2. *Υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|s_n(f) - f\|_1 \not\to 0$ καθώς το $n \to \infty$.* □

Για τη μελέτη του προβλήματος στην περίπτωση $1 < p < \infty$ (και $p \neq 2$) θα δούμε μια δεύτερη αναγωγή, αφού πρώτα εισάγουμε δύο νέες έννοιες.

Ορισμός 6.2.3 (συζυγής συνάρτηση)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $\sum c_k e^{ikx}$ η σειρά Fourier της f. Θεωρούμε την τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-i)(\operatorname{sign} k) c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} k}{i} c_k e^{ikx}, \tag{6.2.1}$$

όπου $\operatorname{sign} x = 1$ αν $x > 0$, $\operatorname{sign} x = -1$ αν $x < 0$ και $\operatorname{sign} 0 = 0$. Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση η οποία έχει σειρά Fourier την (6.2.1), την συμβολίζουμε με $\tilde{f}$ και λέμε ότι η $\tilde{f}$ είναι η **συζυγής συνάρτηση** της f.

Για παράδειγμα, αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ τότε υπάρχει μοναδική $g \in L^2(\mathbb{T})$ με $c_k(g) = (-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)$. Πράγματι,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |(-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2 - |c_0(f)|^2 < \infty,$$

άρα η ύπαρξη της g εξασφαλίζεται από το θεώρημα Riesz-Fisher, η g είναι η συζυγής συνάρτηση $\tilde{f}$ της f, και

$$\|\tilde{f}\|_2 \leqslant \|f\|_2. \tag{6.2.2}$$

Λέμε ότι για κάποιον $1 < p < \infty$ έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$ αν υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε: για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ υπάρχει η συζυγής συνάρτηση $\tilde{f}$ (όπως ορίστηκε παραπάνω), η $\tilde{f}$ ανήκει στον $L^p(\mathbb{T})$, και

$$\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p.$$

Ορισμός 6.2.4 (προβολή). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $\sum c_k e^{ikx}$ η σειρά Fourier της f. Θεωρούμε την τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{6.2.3}$$

Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση η οποία έχει σειρά Fourier την (6.2.3), την συμβολίζουμε με Pf και λέμε ότι η Pf είναι η **προβολή** της f.

Λέμε ότι για κάποιον $1 < p < \infty$ έχουμε προβολές στον $L^p(\mathbb{T})$ αν υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε: για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ υπάρχει η προβολή Pf (όπως ορίστηκε παραπάνω), η Pf ανήκει στον $L^p(\mathbb{T})$, και

$$\|Pf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p.$$

Πρόταση 6.2.5. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Τότε, (α) έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν (β) έχουμε προβολές στον $L^p(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_k c_k(f)e^{ikx}$. Από την υπόθεση, η $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p$. Θεωρούμε την

$$g = \frac{c_0(f)}{2} + \frac{f + i\tilde{f}}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $|c_0(f)| \leqslant \|f\|_1 \leqslant \|f\|_p$. Προφανώς, $g \in L^p(\mathbb{T})$ και

$$\|g\|_p \leqslant \frac{|c_0(f)|}{2} + \frac{\|f\|_p + \|\tilde{f}\|_p}{2} \leqslant \frac{\|f\|_p}{2} + \frac{(A_p+1)\|f\|_p}{2} = \frac{A_p+2}{2}\|f\|_p.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $c_k(\tilde{f}) = (-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)$ βλέπουμε ότι

$$c_k(g) = c_k(f) \text{ αν } k \geqslant 0 \quad \text{και} \quad c_k(g) = 0 \text{ αν } k < 0.$$

Άρα, $g = Pf$ και $\|Pf\|_p \leqslant A'_p \|f\|_p$ (με $A'_p = (A_p+2)/2$).

(β) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_k c_k(f)e^{ikx}$. Από την υπόθεση, η $Pf \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|Pf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g = \frac{2}{i}\left(Pf - \frac{c_0(f)}{2} - \frac{f}{2}\right).$$

Όπως πριν, δείχνουμε ότι $g \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|g\|_p \leqslant A'_p \|f\|_p$. Απλές πράξεις δείχνουν ότι $c_k(g) = (-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)$, άρα $g = \tilde{f}$. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει τον βασικό λόγο για τον οποίο μελετάμε την συζυγή συνάρτηση.

Θεώρημα 6.2.6. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Τότε, έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$.*

Απόδειξη. Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 6.2.1 και 6.2.5 βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την ισοδυναμία των παρακάτω δύο προτάσεων:

(α) Υπάρχει $A_p > 0$ ώστε $\|s_n(f)\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$ για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Υπάρχει $B_p > 0$ ώστε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ η προβολή Pf ανήκει στον $L^p(\mathbb{T})$ και $\|Pf\|_p \leqslant B_p\|f\|_p$.

(α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_k c_k(f)e^{ikx}$. Παρατηρούμε ότι

$$c_k(e^{-inx}f(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-inx}f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-i(k+n)x}dx = c_{k+n}(f)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Άρα,

$$\begin{aligned} e^{inx}s_n(e^{-inx}f,x) &= e^{inx}\sum_{k=-n}^{n} c_k(e^{-inx}f)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_{k+n}(f)e^{i(k+n)x} \\ &= \sum_{j=0}^{2n} c_j(f)e^{ijx}. \end{aligned}$$

Αν ορίσουμε $P_nf(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k(f)e^{ikx}$, έπεται ότι

$$\|P_nf\|_p = \|e^{inx}s_n(e^{-inx}f,x)\|_p = \|s_n(e^{-inx}f,x)\|_p \leqslant A_p\|e^{-inx}f\|_p = A_p\|f\|_p.$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{P_nf\}$ είναι βασική στον $L^p(\mathbb{T})$: θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο g βαθμού N_ε τέτοιο ώστε $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon$. Τότε,

$$\|P_nf - P_ng\|_p = \|P_n(f-g)\|_p \leqslant A_p\|f-g\|_p \leqslant A_p\varepsilon.$$

Έστω $n, m > N_\varepsilon/2$. Τότε, $P_ng(x) = P_mg(x) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} c_k(g)e^{ikx}$, άρα

$$\|P_nf - P_mf\|_p \leqslant \|P_nf - P_ng\|_p + \|P_ng - P_mg\|_p + \|P_mg - P_mf\|_p \leqslant A_p\varepsilon + 0 + A_p\varepsilon = 2A_p\varepsilon.$$

Έτσι, η $\{P_nf\}$ είναι βασική, άρα υπάρχει $h \in L^p(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε

$$\|P_nf - h\|_p \to 0.$$

Ειδικότερα, $\|P_nf - h\|_1 \to 0$, άρα

$$c_k(h) = \lim_{n\to\infty} c_k(P_nf)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αυτό δείχνει ότι $c_k(h) = c_k(f)$ αν $k \geqslant 0$ και $c_k(h) = 0$ αν $k < 0$. Άρα, $h = Pf$. Τέλος, αφού $\|P_nf - h\|_p \to 0$ έχουμε

$$\|h\|_p = \lim_{n\to\infty}\|P_nf\|_p \leqslant A_p\|f\|_p.$$

(β) $\Longrightarrow$ (α) Παρατηρούμε ότι

$$e^{i(2n+1)x}P(e^{-i(2n+1)x}f) = e^{i(2n+1)x}\sum_{k=0}^{\infty} c_{2n+1+k}(f)e^{ikx} = \sum_{s=2n+1} c_se^{isx},$$

άρα

$$e^{inx}s_n(e^{-inx}f) = P_n f = Pf - e^{i(2n+1)x}P(e^{-i(2n+1)x}f).$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτήν την ισότητα με e^{-inx} και αντικαθιστώντας την f με την $e^{inx}f$, παίρνουμε

$$s_n(f) = e^{-inx}P(e^{inx}f) - e^{i(n+1)x}P(e^{-i(n+1)x}f).$$

Έπεται ότι

$$\|s_n(f)\|_p \leqslant \|P(e^{inx}f)\|_p + \|P(e^{-i(n+1)x}f)\|_p \leqslant B_p\|e^{inx}f\|_p + B_p\|e^{-i(n+1)x}f\|_p = 2B_p\|f\|_p$$

για κάθε $n \geqslant 0$. □

Πόρισμα 6.2.7. *Στον $L^1(\mathbb{T})$ δεν έχουμε συζυγία.* □

6.3 Ολοκληρωτική αναπαράσταση της συζυγούς απεικόνισης

Για τη μελέτη της συζυγούς απεικόνισης χρειάζεται να εισάγουμε τον συζυγή πυρήνα Dirichlet και τον συζυγή πυρήνα Fejér.

Ορισμός 6.3.1 (συζυγής πυρήνας Dirichlet)**.** Για κάθε $n \geqslant 0$ ορίζουμε

$$2\tilde{D}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n}(-i)(\operatorname{sign} k)e^{ikt} = (-i)\sum_{k=1}^{n}(e^{ikt} - e^{-ikt}). \tag{6.3.1}$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} = \frac{e^{it}e^{int/2}(e^{-int/2}-e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})}\\ &= e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το t με $-t$, και συνδυάζοντας τις δύο παραστάσεις, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\tilde{D}_n(t) &= \frac{\sin(nt/2)}{2\sin(t/2)}(-i)(e^{i(n+1)t/2} - e^{-i(n+1)t/2})\\ &= 2\sin(nt/2)\frac{\sin((n+1)t/2)}{2\sin(t/2)} = \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)} - \frac{\cos((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\\ &= \frac{1}{2\tan(t/2)} - \frac{\cos((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}.\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η $\tilde{D}_n(t)$ είναι περιττή συνάρτηση, και

$$|\tilde{D}_n(t)| = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=-n}^{n}(-i)(\operatorname{sign} k)e^{ikt}\right| \leqslant \frac{2n}{2} = n. \tag{6.3.3}$$

Επίσης, από την

$$|\tilde{D}_n(t)| = \left|2\sin(nt/2)\frac{\sin((n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}\right|$$

και την $\sin(t/2) \geqslant t/\pi$, $0 < t < \pi$, έχουμε

$$|\tilde{D}_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{|t|} \quad \text{για κάθε } 0 < |t| < \pi. \tag{6.3.4}$$

Ορισμός 6.3.2 (συζυγής πυρήνας Fejér)**.** Για κάθε $n \geqslant 0$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n(t) &= \frac{1}{n+1}(\tilde{D}_0(t) + \cdots + \tilde{D}_n(t)) \\ &= \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos((k+1/2)t)}{2\sin(t/2)}. \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Υπολογίζουμε το άθροισμα του δεξιού μέλους της (6.3.5) ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1/2)t}\right) &= \mathrm{Re}\left(e^{it/2}\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{2\cos((n+1)t/2)\sin((n+1)t/2)}{2\sin(t/2)} \\ &= \frac{\sin((n+1)t)}{2\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\tilde{K}_n(t) = \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{n+1}\frac{\sin((n+1)t)}{[2\sin(t/2)]^2}. \tag{6.3.6}$$

Παρατηρήστε ότι η $\tilde{K}_n(t)$ είναι περιττή συνάρτηση, και

$$|\tilde{K}_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|\tilde{D}_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}.$$

Επίσης,

$$\left|\tilde{K}_n(t) - \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\left|\frac{\sin((n+1)t)}{[2\sin(t/2)]^2}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4(n+1)t^2}, \qquad 0 < |t| < \pi. \tag{6.3.7}$$

Παρατήρηση 6.3.3. Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{K}_n\|_1 = +\infty$$

με το εξής επιχείρημα: ξαναγράφουμε τον συζυγή πυρήνα Fejér στη μορφή

$$\tilde{K}_n(t) = \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}\left(1 - \frac{\sin((n+1)t)}{(n+1)\sin t}\right)$$

και χρησιμοποιώντας την

$$\left|\frac{\sin((n+1)t)}{(n+1)\sin t}\right| \leqslant \frac{\pi}{2t(n+1)}, \qquad 0 < t < \pi/2$$

παίρνουμε

$$\left|1 - \frac{\sin((n+1)t)}{(n+1)\sin t}\right| \geqslant \frac{1}{2} \ \text{ για κάθε } \frac{\pi}{n+1} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\|\tilde{K}_n\|_1 &\geqslant \frac{1}{2}\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/2} \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}\,dt = \frac{1}{2}\ln(\sin(t/2))\Big|_{\pi/(n+1)}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(\sqrt{2}/2) - \ln(\sin(\pi/2(n+1)))\Big] \to \infty\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Σκοπός μας είναι εκφράσουμε σαν ολοκλήρωμα την τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_k (-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)e^{ikt}$$

όπου $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με N:

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}.$$

Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$\tilde{s}_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} (-i)(\operatorname{sign} k)c_k e^{ikt}. \tag{6.3.8}$$

Απλός υπολογισμός (παρόμοιος με αυτόν που κάναμε για το $s_n(f,t)$) δείχνει ότι

$$\tilde{s}_n(f,x) = (2\tilde{D}_n * f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)\tilde{D}_n(t)\,dt. \tag{6.3.9}$$

Αφού η $\tilde{D}_n(t)$ είναι περιττή, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (6.3.9) στη μορφή

$$\tilde{s}_n(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x+t)\tilde{D}_n(t)\,dt \tag{6.3.10}$$

ή στη μορφή

$$\tilde{s}_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{f(x-t) - f(x+t)}{2}\right)\tilde{D}_n(t)\,dt. \tag{6.3.11}$$

Επιπλέον, επειδή η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στο δεξιό μέλος της (6.3.11) είναι άρτια, μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\tilde{s}_n(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x-t))\left(\frac{1}{2\tan(t/2)} - \frac{\cos((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\right)dt. \tag{6.3.12}$$

Αφού η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, για κάθε $n \geqslant N$ έχουμε

$$\tilde{f}(x) = \tilde{s}_n(f,x).$$

Ειδικότερα, $\tilde{s}_n(f,x) \to \tilde{f}(x)$ για κάθε x, καθώς το $n \to \infty$. Από την άλλη πλευρά, παρατηρώντας ότι

$$e^{ik(x+t)} - e^{ik(x-t)} = (-2i)e^{ikx}\sin(kt),$$

παίρνουμε

$$f(x+t) - f(x-t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(e^{ik(x+t)} - e^{ik(x-t)}) = (-2i)\sum_{k=1}^{N} c_k e^{ikx}\sin(kt).$$

Έπεται ότι η συνάρτηση

$$t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x-t)}{\sin(t/2)}$$

είναι φραγμένη, άρα ολοκληρώσιμη, σαν συνάρτηση του t στο $[0,\pi]$. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue,

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)-f(x-t)}{\sin(t/2)}\right)\cos((n+1/2)t)\,dt \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$, αφού το ολοκλήρωμα αυτό εκφράζεται μέσω των n-οστών συντελεστών ημιτόνων και συνημιτόνων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Παίρνοντας λοιπόν το όριο καθώς το $n \to \infty$ στην (6.3.12), βλέπουμε ότι η $\tilde{f}$ εκφράζεται από το (απόλυτα συγκλίνον) ολοκλήρωμα

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\tan(t/2)}\,dt. \tag{6.3.13}$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (6.3.13) συγκλίνει στην περίπτωση που η f ανήκει σε κάποιον $L^p(\mathbb{T})$, $p \geqslant 1$. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν κάτι τέτοιο είναι σωστό τότε δεν θα οφείλεται στο γεγονός ότι η $f(x+t)-f(x-t)$ είναι μικρή για μικρά t, αλλά στην αλληλοεξουδετέρωση των θετικών και αρνητικών τιμών της.

Θεώρημα 6.3.4 (Lusin). *Υπάρχει συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση f τέτοια ώστε*

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}\,dt = +\infty \tag{6.3.14}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αρχικά, κατασκευάζουμε συνεχή 1-περιοδική συνάρτηση g με τις εξής ιδιότητες:

(i) $|g(x)| \leqslant 1$.

(ii) Υπάρχει $A > 0$ ώστε $|g(x+t) - g(x-t)| \leqslant A|t|$.

(iii) Ισχύει

$$\int_{1/n}^1 \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t}\,dt \sim \ln n.$$

Μπορούμε να ξεκινήσουμε με μια συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία παίρνει τις τιμές $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, $g(1/4) = 1$ και είναι γραμμική στα διαστήματα $[0,1/4]$ και $[1/4,1]$. Κατόπιν την επεκτείνουμε σε μια 1-περιοδική συνάρτηση, την οποία συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με g. Είναι φανερό ότι $|g(x)| \leqslant 1$, και δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε $|g(x+t) - g(x)| \leqslant A|t|$ για κάθε x.

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \in [0,1]$,

$$\int_0^1 |g(x+t) - g(x-t)|\, dt \geqslant c > 0. \tag{6.3.15}$$

Πράγματι, η συνάρτηση

$$x \mapsto \int_0^1 |g(x+t) - g(x-t)|\, dt$$

είναι γνήσια θετική, συνεχής και 1-περιοδική, άρα παίρνει θετική ελάχιστη τιμή c. Επίσης, από την (i) έχουμε

$$\int_0^1 |g(x+t) - g(x-t)|\, dt \leqslant 2. \tag{6.3.16}$$

Για κάθε n έχουμε

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_{1/n}^1 \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt \\ &= \int_1^n \left| \frac{g(nx+y) - g(nx-y)}{y} \right| dy \\ &= \int_0^1 |g(nx+t) - g(nx-t)| \left(\frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{t+n-1} \right) dt. \end{aligned} \tag{6.3.17}$$

Αφού

$$c_1 \ln n \leqslant \frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{t+n-1} \leqslant c_2 \ln n$$

για κάθε $t \in [0,1]$, από τις (6.3.15) και (6.3.16) συμπεραίνουμε ότι

$$c_1 c \ln n \leqslant I_n \leqslant 2c_2 \ln n,$$

δηλαδή ισχύει η (iii). Από την (ii) βλέπουμε επίσης ότι

$$\int_0^{1/n} \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt \leqslant 2An \cdot \frac{1}{n} = 2A. \tag{6.3.18}$$

Συνδυάζοντας την (iii) με την (6.3.18) καταλήγουμε στην

$$\int_0^1 \left| \frac{g(nx+nt) - g(nx-nt)}{t} \right| dt \leqslant C \ln n. \tag{6.3.19}$$

Προχωράμε τώρα στον ορισμό της f. Η ιδέα είναι να ορίσουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n g(k_n x),$$

όπου οι $\varepsilon_n > 0$ θα επιλεγούν έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$ και η γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_n) θα επιλεγεί με κατάλληλο τρόπο ώστε να πετύχουμε συγκεκριμένη σχέση ανάμεσα στους ε_n και I_{k_n}.

Γράφουμε

$$
\begin{aligned}
J_n &:= \int_{1/k_n}^{1} \left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right| dt \\
&\geqslant \varepsilon_n \int_{1/k_n}^{1} \left|\frac{g(k_nx+k_nt)-g(k_nx-k_nt)}{t}\right| dt \\
&\quad - \sum_{j=1, j\neq n}^{\infty} \varepsilon_j \int_{1/k_n}^{1} \left|\frac{g(k_jx+k_jt)-g(k_jx-k_jt)}{t}\right| dt \\
&\geqslant \varepsilon_n I_{k_n} - C\sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_j \ln k_j - 2\sum_{j=n+1}^{\infty}\varepsilon_j \int_{1/k_n}^{\infty}\frac{dt}{t} \\
&\geqslant \varepsilon_n I_{k_n} - C\sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_j \ln k_j - 2\ln k_n \sum_{j=n+1}^{\infty}\varepsilon_j .
\end{aligned} \tag{6.3.20}
$$

Μένει να επιλέξουμε τα ε_n και k_n έτσι ώστε η τελευταία ποσότητα να τείνει στο $+\infty$ καθώς το $n\to\infty$. Επιλέγουμε

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n!} \quad \text{και} \quad k_n = 2^{(n!)^2}$$

και ελέγχουμε ότι $J_n \to +\infty$. □

Ορισμός 6.3.5 (περικεκομμένος μετασχηματισμός Hilbert)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $0<\varepsilon<\pi$ ορίζουμε

$$H_\varepsilon f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\tan(t/2)}\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|\leqslant\pi}\frac{f(x+t)}{2\tan(t/2)}\,dt. \tag{6.3.21}$$

Πρόταση 6.3.6 ($p=2$)**.** *Έστω $f\in L^2(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|H_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2 = 0.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\|H_\varepsilon f\|_2 \leqslant c\|f\|_2, \tag{6.3.22}$$

όπου $c>0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από την f και το ε. Για το σκοπό αυτό γράφουμε

$$
\begin{aligned}
H_\varepsilon f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|\leqslant\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{2\tan(t/2)}-\frac{1}{t}\right)dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|\leqslant\pi}\frac{f(x-t)}{t}\,dt =: A(x)+B(x).
\end{aligned} \tag{6.3.23}
$$

Παρατηρήστε ότι

$$A(x) = (f * 2\phi_1)(x) \quad \text{και} \quad B(x) = (f * 2\phi_2)(x),$$

όπου

$$\phi_1(t) = \chi_{[-\pi,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\pi]}(t)\left(\frac{1}{2\tan(t/2)} - \frac{1}{t}\right)$$

και

$$\phi_2(t) = \chi_{[-\pi,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\pi]}(t)\frac{1}{t}.$$

Θα δείξουμε ότι $\sup_k |c_k(\phi_1)| \leqslant M$ και $\sup_k |c_k(\phi_2)| \leqslant M$ για κάποια σταθερά $M > 0$. Τότε,

$$\|A\|_2 = \|f * 2\phi_1\|_2 = 2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 |c_k(\phi_1)|^2\right)^{1/2} \leqslant 2M\|f\|_2$$

και

$$\|B\|_2 = \|f * 2\phi_2\|_2 = 2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 |c_k(\phi_2)|^2\right)^{1/2} \leqslant 2M\|f\|_2,$$

άρα

$$\|H_\varepsilon f\|_2 \leqslant \|A\|_2 + \|B\|_2 \leqslant 4M\|f\|_2.$$

Για να φράξουμε τους $c_k(\phi_1)$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $t \mapsto \frac{1}{2\tan(t/2)} - \frac{1}{t}$ είναι φραγμένη, άρα

$$|c_k(\phi_1)| \leqslant \|\phi_1\|_1 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{1}{2\tan(t/2)} - \frac{1}{t}\right| dt = M_1 < \infty.$$

Για να φράξουμε τους $c_k(\phi_2)$ υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $k > 0$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} c_k(\phi_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon} e^{-ikt}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} e^{-ikt}\frac{dt}{t} \\ &= \frac{(-2i)}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin kt}{t}\,dt = \frac{(-i)}{\pi}\int_{\varepsilon k}^{\pi k} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι υπάρχει σταθερά $M_2 > 0$ ώστε, για κάθε $a < b$ στο $(0,\infty)$,

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant M_2.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την (6.3.22): υπάρχει $c > 0$ ώστε: για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon \in (0,\pi)$,

(6.3.24) $$\|H_\varepsilon f\|_2 \leqslant c\|f\|_2.$$

Δείχνουμε τώρα ότι το συμπέρασμα της πρότασης ισχύει για τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Πράγματι, από την (6.3.13) έχουμε ότι

(6.3.25) $$\tilde{p}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{p(x+t) - p(x-t)}{2\tan(t/2)}\,dt$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p, άρα

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon p(x) = \tilde{p}(x).$$

Έχουμε επίσης δεί ότι οι $H_\varepsilon p$ και $\tilde{p}$ είναι φραγμένες στο $\mathbb{T}$ (ανεξάρτητα από το ε), άρα

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 = 0. \tag{6.3.26}$$

Τώρα, για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και για κάθε $\delta > 0$ επιλέγουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_2 < \delta$, και γράφουμε

$$\begin{aligned}\|H_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2 &\leqslant \|H_\varepsilon f - H_\varepsilon p\|_2 + \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 + \|\tilde{p} - \tilde{f}\|_2\\ &= \|H_\varepsilon (f-p)\|_2 + \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 + \|\widetilde{(p-f)}\|_2\\ &\leqslant c\|f-p\|_2 + \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 + \|p-f\|_2\\ &\leqslant (c+1)\delta + \|H_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και την (6.2.2). Από την (6.3.26) συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2 \leqslant (c+1)\delta, \tag{6.3.27}$$

και αφού το $\delta > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Η μελέτη της συμπεριφοράς της $H_\varepsilon f$ στην περίπτωση που η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη είναι πολύ πιο λεπτό θέμα. Αρχικά, θα συνδέσουμε την $H_\varepsilon f(x)$ με τους μέσους $\tilde{\sigma}_n(f,x)$, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)e^{ikx}, \tag{6.3.28}$$

τότε εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = (2\tilde{K}_n * f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)\tilde{K}_n(t)\,dt. \tag{6.3.29}$$

Αφού η $\tilde{K}_n(t)$ είναι περιττή συνάρτηση, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (6.3.9) στη μορφή

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x+t)\tilde{K}_n(t)\,dt \tag{6.3.30}$$

ή στη μορφή

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{f(x-t)-f(x+t)}{2}\right)\tilde{K}_n(t)\,dt. \tag{6.3.31}$$

Επιπλέον, επειδή η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στο δεξιό μέλος της (6.3.31) είναι άρτια, μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t)-f(x-t))\left(\frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{n+1}\frac{\sin((n+1)t)}{[2\sin(t/2)]^2}\right)dt. \tag{6.3.32}$$

Θεώρημα 6.3.7 (Lebesgue). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) - H_{1/n}f(x) \to 0 \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Επιπλέον, αν η $\tilde{f}(x)$ υπάρχει, τότε $\tilde{\sigma}_n(f,x) = \sigma_n(\tilde{f},x)$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $H_{1/n}f$ και την (6.3.32) έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_n(f,x) - H_{1/n}f(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n} (f(x+t) - f(x-t))\,\tilde{K}_n(t)\,dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\pi} (f(x+t) - f(x-t))\left(\tilde{K}_n(t) - \frac{1}{2\tan(t/2)}\right)dt \\ &= A_n(x) + B_n(x).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $|\tilde{K}_n(t)| \leqslant n/2$ βλέπουμε ότι

$$|A_n(x)| \leqslant c_1 n \int_0^{1/n} |f(x+t) - f(x-t)|\,dt \to 0$$

σε κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$, δηλαδή σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Χρησιμοποιώντας την $\left|\tilde{K}_n(t) - \frac{1}{2\tan(t/2)}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4(n+1)t^2}$ στο $[1/n,\pi]$ βλέπουμε ότι

$$|B_n(x)| \leqslant \frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{\pi} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2}.$$

Γράφουμε

$$\frac{c_2}{n}\int_{1/n^{1/4}}^{\pi} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{n}}\int_0^{\pi} |f(x+t) - f(x-t)|\,dt \leqslant \frac{c_3\|f\|_1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Μένει να εκτιμήσουμε το

$$\frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F_x(t) = \int_0^t |f(x+s) - f(x-s)|\,ds.$$

Η F_x είναι απολύτως συνεχής, και μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}&\frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} |f(x+t) - f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2} \\ &\qquad = \frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} F_x'(t)\,\frac{dt}{t^2} = \frac{c_2}{n}\frac{F_x(t)}{t^2}\Big|_{1/n}^{1/n^{1/4}} + \frac{2c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} F_x(t)\,\frac{dt}{t^3}.\end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$ έχουμε $\lim_{t\to 0^+} \frac{F_x(t)}{t} = 0$, άρα

$$\frac{c_2}{n}\left|\frac{F_x(t)}{t^2}\Big|_{1/n}^{1/n^{1/4}}\right| \leqslant \frac{c_2}{n^{3/4}}\frac{F_x(1/n^{1/4})}{1/n^{1/4}} + c_2\frac{F_x(1/n)}{1/n} \to 0$$

καθώς το $n\to\infty$. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{2c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} F_x(t)\,\frac{dt}{t^3} &\leqslant \frac{2c_2}{n}\int_{1/n}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\cdot\max\left\{\frac{F_x(t)}{t} : t\in[1/n, 1/n^{1/4}]\right\}\\ &= 2c_2\max\left\{\frac{F_x(t)}{t} : t\in[1/n,1/n^{1/4}]\right\}\to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n\to\infty$. Έτσι, έχουμε

$$\frac{c_2}{n}\int_{1/n}^{1/n^{1/4}} |f(x+t)-f(x-t)|\,\frac{dt}{t^2}\to 0$$

για κάθε $x\in\mathrm{Leb}(f)$ καθώς το $n\to\infty$.

Δείξαμε ότι $\lim_{n\to\infty} A_n(x) = \lim_{n\to\infty} B_n(x) = 0$ για κάθε $x\in\mathrm{Leb}(f)$, άρα $\tilde{\sigma}_n(f,x) - H_{1/n}f(x)\to 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η $\tilde{f}$ υπάρχει. Τότε, απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = (f * 2\tilde{K}_n)(x) = (\tilde{f} * 2K_n)(x) = \sigma_n(\tilde{f},x).$$

Αυτό προκύπτει για παράδειγμα από την ισότητα

$$c_k(\tilde{f} * 2K_n) = c_k(\tilde{f})c_k(2K_n) = \left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(\mathrm{sign}\,k)c_k(f)$$

και την (6.3.28). □

Πόρισμα 6.3.8. *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ αν και μόνο αν το $\lim_{n\to\infty}\tilde{\sigma}_n(f,x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Επιπλέον, τα δύο αυτά όρια συμπίπτουν, αν υπάρχουν.*

Απόδειξη. Αν το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$, τότε το $\lim_{n\to\infty} H_{1/n}f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ και το ζητούμενο έπεται άμεσα από το Θεώρημα 6.3.7.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το $\lim_{n\to\infty}\tilde{\sigma}_n(f,x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Τότε, το όριο $\lim_{n\to\infty} H_{1/n}f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon\in(0,1)$ και τον μοναδικό φυσικό n για τον οποίο $\frac{1}{n+1}\leqslant\varepsilon<\frac{1}{n}$. Τότε,

$$H_\varepsilon f(x) - H_{1/n}f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^{1/n}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\tan(t/2)}\,dt$$

άρα

$$\begin{aligned}|H_\varepsilon f(x) - H_{1/n}f(x)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{1/(n+1)}^{1/n}\left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\tan(t/2)}\right|dt\\ &\leqslant cn\int_0^{1/n}|f(x+t)-f(x-t)|\,dt\to 0\end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$ καθώς το $n \to \infty$. Αυτό αποδεικνύει ότι οι $H_\varepsilon f(x)$ και $H_{1/n} f(x)$ έχουν την ίδια συμπεριφορά καθώς το $\varepsilon \to 0^+$ και το $n \to \infty$ αντίστοιχα. Έπεται ότι το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με το $\lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n(f,x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. □

Πόρισμα 6.3.9. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x) = \tilde{f}(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Αφού $f \in L^2(\mathbb{T})$, γνωρίζουμε ότι $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$. Συνεπώς,

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = \sigma_n(\tilde{f},x) \to \tilde{f}(x)$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ καθώς το $n \to \infty$. Από το Πόρισμα 6.3.8 παίρνουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n(f,x) = \tilde{f}(x)$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. □

Κεφάλαιο 7

Ο μετασχηματισμός Hilbert στον $L^p(\mathbb{T})$

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δούμε ότι για κάθε $1 < p < \infty$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\|f - s_n(f)\|_p \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |t| < \pi} \frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}\, dt$$

ορίζεται καλά για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και ότι για κάθε $1 < p < \infty$ υπάρχει σταθερά $C_p > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\|Hf\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$$

και $\tilde{f} = Hf$. Αυτό δείχνει ότι έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$ και κατόπι μπορούμε να εφαρμόσουμε τις αναγωγές του προηγούμενου Κεφαλαίου.

Βασικό ρόλο στην απόδειξη των παραπάνω θα παίξουν το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz (το οποίο συζητάμε στην Παράγραφο 7.1), η διάσπαση Calderón-Zygmund μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης (την οποία περιγράφουμε στην Παράγραφο 7.2) και ο μεγιστικός τελεστής $f \mapsto Mf = f^*$, όπου f^* είναι η μεγιστική συνάρτηση της f που έχουμε συζητήσει στο Κεφάλαιο 2.

7.1 Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz

Έχουμε δεί ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η μεγιστική συνάρτηση $Mf = f^*$ της f δεν είναι γενικά ολοκληρώσιμη, ικανοποιεί όμως την εξής ανισότητα ασθενούς τύπου: για κάθε $\lambda > 0$,

$$m(\{x : Mf(x) > \lambda\}) \leqslant \frac{c}{\lambda} \|f\|_1, \tag{7.1.1}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά (ανεξάρτητη από την f και την τιμή του λ). Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι ο μεγιστικός τελεστής $f \mapsto Mf$ απεικονίζει τον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Πράγατι, για κάθε ανοικτή μπάλα B με $x \in B$ έχουμε

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy \leqslant \frac{1}{m(B)} \int_B \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty,$$

συνεπώς

$$|Mf(x)| = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy \leqslant \|f\|_\infty. \tag{7.1.2}$$

Έπεται ότι

$$\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty. \tag{7.1.3}$$

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι τι μπορούμε να πούμε για την συμπεριφορά της Mf αν υποθέσουμε ότι $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάποιο $1 < p < \infty$. Θα μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα στο γενικότερο πλαίσιο των υπογραμμικών τελεστών.

Ορισμός 7.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένας τελεστής $f \mapsto Tf$ λέγεται υπογραμμικός αν για κάθε f_1 και f_2 για τις οποίες οι Tf_1 και Tf_2 ορίζονται καλά, οι $T(f_1 + f_2)$ και $T(af_1)$, $a \in \mathbb{K}$, ορίζονται καλά και ικανοποιούν τις

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leqslant |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)| \ \text{ σχεδόν παντού} \tag{7.1.4}$$

και

$$|T(af_1)(x)| \leqslant |a|\, |Tf_1(x)| \ \text{ σχεδόν παντού} \tag{7.1.5}$$

Λέμε ότι ένας υπογραμμικός τελεστής είναι (ισχυρού) τύπου (p, p) για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant \infty$ αν ορίζεται καλά σαν τελεστής από τον $L^p(\mu)$ στον $L^p(\mu)$ και υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε

$$\|Tf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \tag{7.1.6}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$. Όμοια, λέμε ένας υπογραμμικός τελεστής είναι ασθενούς τύπου (p, p) για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ αν ορίζεται καλά για κάθε $f \in L^p(\mu)$ και υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε

$$\lambda^p m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leqslant A_p^p \|f\|_p^p \tag{7.1.7}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$ και για κάθε $\lambda > 0$.

Συνήθως, θα θεωρούμε τελεστές T οι οποίοι ορίζονται φυσιολογικά σε ένα ζεύγος χώρων $L^{p_0}(\mu)$ και $L^{p_1}(\mu)$. Είναι βολικό να θεωρήσουμε τον χώρο $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ όλων των συναρτήσεων f οι οποίες γράφονται στη μορφή $f = f_0 + f_1$ για κάποιες $f_0 \in L^{p_0}(\mu)$ και $f_1 \in L^{p_1}(\mu)$. Ο $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L^{p_0} + L^{p_1}} = \inf\{\|f_0\|_{p_0} + \|f_1\|_{p_1} : f_i \in L^{p_i}, f = f_0 + f_1\}. \tag{7.1.8}$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz. Με $L(\mu)$ συμβολίζουμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 7.1.2 (Marcinkiewicz)**.** *Έστω $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$ και έστω $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L(\mu)$ υπογραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου (p_0, p_0) με σταθερά A_0 και ισχυρού τύπου (p_1, p_1) με σταθερά A_1. Τότε, για κάθε $p_0 < p < p_1$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p, p) με σταθερά*

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1 - p}\right)^{1/p} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}$$

αν $p_1 < \infty$, και

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}}$$

αν $p_1 = \infty$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $p_1 < \infty$ και $p_1 = \infty$.

(α) **Η περίπτωση** $0 < p_0 < p < p_1 < \infty$. Έστω $f \in L^p(\mu)$ και $\delta > 0$ το οποίο θα επιλεγεί αργότερα. Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$f_0^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| > \delta\lambda \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$f_1^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| \leqslant \delta\lambda \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f_0^\lambda \in L^{p_0}(\mu)$, $f_1^\lambda \in L^{p_1}(\mu)$ και $f = f_1 + f_2$. Για τον πρώτο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι $p_0 - p < 0$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f_0^\lambda\|_{p_0}^{p_0} &= \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_0-p} d\mu \leqslant (\delta\lambda)^{p_0-p} \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant (\delta\lambda)^{p_0-p} \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αφού $p_1 - p > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|f_1^\lambda\|_{p_1}^{p_1} &= \int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_1-p} dx \leqslant (\delta\lambda)^{p_1-p} \{x : |f(x)| \leqslant \delta\lambda\} |f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant (\delta\lambda)^{p_1-p} \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned} \tag{7.1.10}$$

Τέλος, από τον ορισμό των f_0^λ και f_1^λ είναι φανερό ότι $f = f_0^\lambda + f_1^\lambda$.

Στη συνέχεια, για ευκολία στον συμβολισμό θέτουμε $m_g(s) = m(\{x : |g(x)| > s\})$. Από την υπογραμμικότητα του T έχουμε $|Tf| \leqslant |Tf_0^\lambda| + |Tf_1^\lambda|$ σχεδόν παντού, άρα

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

και αυτό μας δίνει

$$m_{Tf}(\lambda) \leqslant m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) + m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2). \tag{7.1.11}$$

Από τις υποθέσεις μας έχουμε

$$m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_0^{p_0}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda}|f(x)|^{p_0}dx \tag{7.1.12}$$

και

$$m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_1^{p_1}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1}\|f_1^\lambda\|_{p_1}^{p_1} = A_1^{p_1}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1}\int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda}|f(x)|^{p_1}dx. \tag{7.1.13}$$

Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}m_{Tf}(\lambda)\,d\lambda \\ &\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1}m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda + \int_0^\infty p\lambda^{p-1}m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda,\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

και χρησιμοποιούμε τις (7.1.11) και (7.1.12) για να φράξουμε τα δύο ολοκληρώματα. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p\lambda^{p-1}m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda &\leqslant p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}}|f(x)|^{p_0}dx \\ &= p(2A_0)^{p_0}\int|f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/\delta}\lambda^{p-p_0-1}d\lambda\,dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\int|f(x)|^pdx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\,\|f\|_p^p\end{aligned} \tag{7.1.15}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p\lambda^{p-1}m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda &\leqslant p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_1}\int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}}|f(x)|^{p_1}dx \\ &= p(2A_1)^{p_1}\int|f(x)|^{p_1}\int_{|f(x)|/\delta}^\infty\lambda^{p-p_1-1}d\lambda\,dx \\ &= \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\int|f(x)|^pdx \\ &= \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\,\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|Tf\|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} + \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\right)^{1/p}\|f\|_p \tag{7.1.16}$$

για κάθε $\delta>0$. Επιλέγουμε το δ να ικανοποιεί την

$$\delta^{p_1-p_0} = \frac{(2A_0)^{p_0}}{(2A_1)^{p_1}},$$

και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε το συμπέρασμα.

(β) **Η περίπτωση** $1 \leqslant p_0 < p < p_1 = \infty$. Έστω $f \in L^p(\mu)$. Επιλέγουμε από την αρχή $\delta = \frac{1}{2A_1}$. Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε τις f_0^λ και f_1^λ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Παρατηρήστε ότι

$$\|Tf_1^\lambda\|_\infty \leqslant A_1\|f_1^\lambda\|_\infty \leqslant A_1\delta\lambda = \lambda/2. \tag{7.1.17}$$

Συνεπώς, από την

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

παίρνουμε

$$m_{Tf}(\lambda) \leqslant m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) + m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) = m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2). \tag{7.1.18}$$

Από τις υποθέσεις μας έχουμε

$$m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_0^{p_0}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0}dx. \tag{7.1.19}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την $2A_1 = 1/\delta$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1}m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda \\ &\leqslant p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}}|f(x)|^{p_0}dx \\ &= p(2A_0)^{p_0}\int |f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/\delta}\lambda^{p-p_0-1}d\lambda\,dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\int |f(x)|^p dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\,\|f\|_p^p \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\,\|f\|_p^p.\end{aligned} \tag{7.1.20}$$

Έπεται ότι

$$\|Tf\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p}A_0^{\frac{p_0}{p}}A_1^{1-\frac{p_0}{p}}\|f\|_p.$$

Δηλαδή, ο T είναι (ισχυρού) τύπου (p,p). □

Ειδικότερα, στην περίπτωση $p_0 = 1$ και $p_1 = \infty$ το Θεώρημα 7.1.2 παίρνει την εξής απλούστερη μορφή.

Θεώρημα 7.1.3. *Έστω $T : L^1(\mu) + L^\infty(\mu) \to L(\mu)$ υπογραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ με σταθερά A και ισχυρού τύπου (∞,∞) με σταθερά B. Τότε, για κάθε $1 < p < \infty$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p,p) με σταθερά*

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}A^{\frac{1}{p}}B^{1-\frac{1}{p}}.$$

Το Θεώρημα 7.1.3 εφαρμόζεται για τον μεγιστικό τελεστή $f \mapsto Mf$. Όπως είδαμε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου, ο M είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ με σταθερά c και ισχυρού τύπου (∞,∞) με σταθερά 1. Από τον ορισμό του M βλέπουμε εύκολα ότι είναι υπογραμμικός τελεστής. Συνεπώς, από το Θεώρημα 7.1.3 παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 7.1.4. *Έστω $1 < p < \infty$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|Mf\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} C_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_p,$$

όπου $C_n = 3^n$.

Παρατηρήστε ότι

$$2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} C_n^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$$

καθώς το $p \to 1+$.

7.2 Διάσπαση Calderón-Zygmund

Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Συμβολίζουμε με $f_{\mathbb{T}}$ τη μέση τιμή της $|f|$:

$$f_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\, dy.$$

Θεωρούμε έναν $\lambda > 0$ τέτοιον ώστε

$$f_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\, dy < \lambda.$$

Θα δουλέψουμε με τα λεγόμενα ανοικτά δυαδικά διαστήματα του $\mathbb{T}$. Αυτά είναι τα ανοικτά διαστήματα που προκύπτουν όταν διαιρούμε διαδοχικά το $\mathbb{T}$ σε ανοικτά διαστήματα με το ίδιο μήκος. Στο πρώτο βήμα λοιπόν χωρίζουμε το $\mathbb{T}$ στα ανοικτά διαστήματα $\mathbb{T}_1 = (-\pi, 0)$ και $\mathbb{T}_2 = (0, \pi)$. Παρατηρήστε ότι

$$\frac{f_{\mathbb{T}_1} + f_{\mathbb{T}_2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}_1} |f(y)|\, dy + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}_2} |f(y)|\, dy\right) = f_{\mathbb{T}} < \lambda,$$

άρα τουλάχιστον μία από τις μέσες τιμές $f_{\mathbb{T}_1}$ και $f_{\mathbb{T}_2}$ είναι μικρότερη από λ. Επίσης, για $i = 1, 2$ έχουμε

$$f_{\mathbb{T}_i} \leqslant 2f_{\mathbb{T}} < 2\lambda.$$

Συνεχίζουμε την διαδικασία ως εξής: αν η μέση τιμή της f σε κάποιο υποδιάστημα είναι μικρότερη ή ίση από λ τότε διαιρούμε αυτό το διάστημα σε δύο ανοικτά διαστήματα ίσου μήκους. Αν η μέση τιμή της f σε κάποιο υποδιάστημα είναι μεγαλύτερη από λ τότε κρατάμε αυτό το διάστημα και το ονομάζουμε I_j (αν είναι το j-οστό διάστημα που προέκυψε κατ' αυτόν τον τρόπο). Τότε,

$$\lambda < \frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j} |f(y)|\, dy = f_{I_j} < 2\lambda.$$

Ας υποθέσουμε ότι, μετά από k βήματα, έχουμε κρατήσει τα $I_1, \ldots, I_n$. Όλα τα διαστήματα I που δεν έχουν κρατηθεί έχουν την ιδιότητα ότι $f_I < \lambda$. Χωρίζουμε καθένα από αυτά τα διαστήματα σε δύο ανοικτά διαστήματα ίσου μήκους. Η μέση τιμή της f σε καθένα από αυτά είναι μικρότερη ή ίση από 2λ και υπάρχει τουλάχιστον από ατά στο οποίο η μέση τιμή της f είναι μικρότερη από λ. Εκείνα τα διαστήματα στα οποία η μέση τιμή της f είναι μεταξύ λ και 2λ τα μετονομάζουμε σε $I_{n+1}, \ldots, I_m$ και τα κρατάμε. Αυτά είναι τα διαστήματα που προκύπτουν στο $(k+1)$-οστό βήμα. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία παίρνουμε μια οικογένεια $\{I_j\}$ από ξένα ανοικτά δυαδικά υποδιαστήματα του $\mathbb{T}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) Για κάθε j ισχύει

$$\lambda < \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(y)|\, dy < 2\lambda, \tag{7.2.1}$$

συνεπώς,

$$\sum_j m(I_j) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{I_j} |f(y)|\, dy \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{T}} |f(y)|\, dy. \tag{7.2.2}$$

(ii) Αν $\Omega = \bigcup_j I_j$ τότε σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega$ υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία $\{J_s(x)\}$ δυαδικών διαστημάτων, η οποία συγκλίνει στο x, με την ιδιότητα: για κάθε s,

$$\frac{1}{m(J_s)} \int_{J_s} |f(y)|\, dy < \lambda. \tag{7.2.3}$$

Η (7.2.3) ισχύει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega$, διότι δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει απαραίτητα στα άκρα των δυαδικών υποδιαστημάτων του $\mathbb{T}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι $x \in \mathrm{Leb}(f)$, τότε

$$|f(x)| = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{m(J_s)} \int_{J_s} |f(y)|\, dy \leqslant \lambda. \tag{7.2.4}$$

Συνεπώς, $|f(x)| \leqslant \lambda$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega$.

Η οικογένεια $\{I_j\}$ που προκύπτει με την παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **διάσπαση Calderón-Zygmund** της f στο επίπεδο λ. Με βάση αυτήν την διάσπαση ορίζουμε

$$g_\lambda(x) := g(x) = f(x)\chi_{\mathbb{T}\setminus K}(x) + \sum_j \left(\frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y)\, dy \right) \chi_{I_j}(x) \tag{7.2.5}$$

και

$$b_\lambda(x) := b(x) = f(x) - g(x) = \sum_j \left(f(x) - \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y)\, dy \right) \chi_{I_j}(x). \tag{7.2.6}$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \in \Omega$ έχουμε $x \in I_j$ για κάποιο j, και

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(y)|\, dy \leqslant 2\lambda. \tag{7.2.7}$$

Αφού $|g(x)| = |f(x)| \leqslant \lambda$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega$, έπεται ότι

$$\|g\|_\infty \leqslant 2\lambda. \tag{7.2.8}$$

Για την b έχουμε $b(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\int_{I_j} b(x)\,dx = \int_{I_j} f(x)\,dx - m(I_j) \cdot \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y)\,dy = 0 \tag{7.2.9}$$

για κάθε j, και

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |b(x)|\,dx &= \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} \left| f(x) - \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y)\,dy \right| dx \\ &\leqslant \frac{2}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(y)|\,dy \leqslant 4\lambda \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

για κάθε j.

Το επόμενο θεώρημα συνοψίζει την κατασκευή που περιγράψαμε.

Θεώρημα 7.2.1 (διάσπαση Calderón-Zygmund στο επίπεδο λ). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $\lambda > 0$ με*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(y)|\,dy < \lambda.$$

Υπάρχει ακολουθία $\{I_j\}$ ξένων ανοικτών δυαδικών υποδιαστημάτων του $\mathbb{T}$ τέτοια ώστε:

$$|f(x)| \leqslant \lambda \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_j I_j \tag{7.2.11}$$

και

$$\lambda \leqslant \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} |f(y)|\,dy \leqslant 2\lambda \quad \text{για κάθε } j. \tag{7.2.12}$$

Αν $\Omega = \bigcup_j I_j$ τότε

$$m(\Omega) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |f(y)|\,dy \leqslant \frac{2\pi}{\lambda} \|f\|_1. \tag{7.2.13}$$

Επιπλέον, αν ορίσουμε

$$g(x) = f(x)\chi_{\mathbb{T}\setminus\Omega}(x) + \sum_j \left(\frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y)\,dy \right) \chi_{I_j}(x) \tag{7.2.14}$$

και

$$b(x) = \sum_j \left(f(x) - \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y)\,dy \right) \chi_{I_j}(x), \tag{7.2.15}$$

τότε $f(x) = g(x) + b(x)$, *και οι συναρτήσεις* G *και* B *έχουν τις εξής ιδιότητες:*

$$|g(x)| \leqslant 2\lambda \tag{7.2.16}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$,

$$\|g\|_p^p \leqslant (2\lambda)^{p-1}\|f\|_1 \tag{7.2.17}$$

για κάθε $1 \leqslant p < \infty$, *και*

$$\int_{I_j} b(y)\,dy = 0, \qquad \frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j} |b(y)|\,dy \leqslant \frac{2}{m(I_j)}\int_{I_j} |f(y)|\,dy \tag{7.2.18}$$

και

$$\|b\|_1 \leqslant 2\|f\|_1. \tag{7.2.19}$$

Απόδειξη. Το μόνο που μένει να ελέγξουμε είναι η (7.2.17), η οποία είναι απλή συνέπεια της $\|g\|_\infty \leqslant 2\lambda$. Έχουμε

$$\int_{\mathbb{T}} |g(x)|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{T}} \|g\|_\infty^{p-1}|g(x)|\,dx \leqslant (2\lambda)^{p-1}\int_{\mathbb{T}} |g(x)|\,dx \leqslant (2\lambda)^{p-1}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|\,dx.$$

για κάθε $p \geqslant 1$. □

7.3 Ύπαρξη του μετασχηματισμού Hilbert για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την ύπαρξη του μετασχηματισμού Hilbert για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Θεώρημα 7.3.1 (ύπαρξη και ορισμός του μετασχηματισμού Hilbert)**.** *Έστω* $f \in L^1(\mathbb{T})$. *Το όριο*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} \frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}\,dt \tag{7.3.1}$$

υπάρχει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$. *Ορίζουμε*

$$Hf(x) = \text{p.v.}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}\,dt := \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} \frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}\,dt. \tag{7.3.2}$$

Η καλά ορισμένη συνάρτηση Hf *είναι ο* **μετασχηματισμός Hilbert** *της* f.

Απόδειξη. Για κάθε $\lambda > \|f\|_1$ θεωρούμε την διάσπαση Calserón-Zygmund της f στο επίπεδο λ_k: στη συνέχεια θα γράφουμε $g = g_{\lambda_k}$, $f = f_{\lambda_k}$ και $I_j = (x_j - L_j/2, x_j + L_j/2)$. Ορίζουμε επίσης $2I_j := (x_j - L_j, x_j + L_j)$ και $\Omega^* = \bigcup_j 2I_j$. Παρατηρήστε ότι

$$m(\Omega^*) \leqslant \sum_j m(2I_j) = 2\sum_j m(I_j) = 2m(\Omega) \leqslant \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\,dy. \tag{7.3.3}$$

Για κάθε $0 < \varepsilon < \pi$ έχουμε $H_\varepsilon f = H_\varepsilon g + H_\varepsilon b$ και αφού $g \in L^2(\mathbb{T})$ γνωρίζουμε ότι ορίζεται η

$$\tilde{g}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon g(x) \tag{7.3.4}$$

και $\|\tilde{g}\|_2 \leqslant C_1 \|g\|_2$. Ο βασικός ισχυρισμός είναι ο εξής:

Ισχυρισμός 1. *Το $\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon b(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$.*

Έχοντας αποδείξει τον Ισχυρισμό 1 για κάθε $\lambda > \|f\|_1$ μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος ως εξής. Θεωρούμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία (λ_k) με $\lambda_k > \|f\|_1$ και $\lambda_k \to \infty$. Για κάθε k υπάρχει το

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) = \tilde{g}_{\lambda_k}(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon b_{\lambda_k}(x)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_{\lambda_k}$. Άρα, το $\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει για όλα τα $x \in \mathbb{T} \setminus \bigcap_k \Omega^*_{\lambda_k}$. Όμως, από την (7.3.3), για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$m\left(\bigcap_k \Omega^*_{\lambda_k}\right) \leqslant m(\Omega^*_{\lambda_n}) \leqslant \frac{2}{\lambda_n} \int_{\mathbb{T}} |f(y)|\, dy \to 0 \tag{7.3.5}$$

καθώς το $n \to \infty$. Άρα, $m\left(\bigcap_k \Omega^*_{\lambda_k}\right) = 0$ και αυτό αποδεικνύει ότι το $\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού 1 αρκεί να δείξουμε ότι σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$ τότε η $\{H_\varepsilon b(x)\}_{\varepsilon > 0}$ είναι Cauchy, δηλαδή ότι

$$\lim_{\varepsilon, \eta \to 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| = 0. \tag{7.3.6}$$

Αρχικά θα δείξουμε κάτι ασθενέστερο:

Ισχυρισμός 2. *Σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$ ισχύει*

$$\limsup_{\varepsilon, \eta \to 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| < \infty. \tag{7.3.7}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. Θεωρούμε $0 < \eta < \varepsilon < \pi$ και γράφουμε

$$H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x-\eta} \frac{b(t)}{2 \tan \frac{x-t}{2}}\, dt - \frac{1}{\pi} \int_{x+\eta}^{x+\varepsilon} \frac{b(t)}{2 \tan \frac{x-t}{2}}\, dt. \tag{7.3.8}$$

Θα φράξουμε απολύτως το

$$\int_{x+\eta}^{x+\varepsilon} \frac{b(t)}{2 \tan \frac{x-t}{2}}\, dt.$$

Όμοια δουλεύουμε με το άλλο ολοκλήρωμα. Παρατηρήστε ότι $x \notin 2I_j$ για κάθε j και ότι $b(t) = \sum_j b(t)\chi_{I_j}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$. Συνεπώς,

$$\int_{x+\eta}^{x+\varepsilon} \frac{b(t)}{2 \tan \frac{x-t}{2}}\, dt = \sum_{\{j : (x+\eta, x+\varepsilon) \cap I_j \neq \emptyset\}} \int_{(x+\eta, x+\varepsilon) \cap I_j} \frac{b(t)}{2 \tan \frac{x-t}{2}}\, dt. \tag{7.3.9}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι αν $(x+\eta, x+\varepsilon)\cap I_j \neq \emptyset$ τότε συμβαίνει ένα από τα εξής: (α) $x+\eta \in I_j$, (β) $x+\varepsilon \in I_j$ ή (γ) $I_j \subseteq [x+\eta, x+\varepsilon]$. Επίσης, καθένα από τα (α) ή (β) μπορεί να συμβαίνει για μία (το πολύ) τιμή του j διότι τα I_j είναι ξένα. Εξετάζουμε τις τρείς αυτές περιπτώσεις χωριστά:

(α) $x+\eta \in I_j$: Θυμηθείτε ότι $2I_j = (x_j - L_j, x_j + L_j)$. Αφού $x \notin 2I_j$, έχουμε $|x - x_j| \geqslant L_j$. Επίσης, αφού $x+\eta \in I_j$ έχουμε $|x+\eta - x_j| < L_j/2$. Συνεπώς,

$$\eta = |\eta| \geqslant |x - x_j| - |x+\eta - x_j| > L_j - \frac{L_j}{2} = \frac{L_j}{2}.$$

Έπεται ότι

$$(x+\eta, x+\varepsilon)\cap I_j \subseteq (x+\eta, x+\eta+L_j) \subseteq (x+\eta, x+\eta+3\eta) = (x+\eta, x+3\eta).$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι $x \in \mathrm{Leb}(f)$. Παίρνοντας υπ' όψιν και την $b(x) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\tan\frac{x-t}{2}}\,dt\right| &\leqslant \int_{x+\eta}^{x+3\eta} \frac{|b(t)|}{2|\tan\frac{x-t}{2}|}\,dt \\ &= \int_{\eta}^{3\eta} \frac{|b(x+t) - b(x)|}{2|\tan\frac{t}{2}|}\,dt \leqslant \frac{c}{\eta}\int_{\eta}^{3\eta} |b(x+t) - b(x)|\,dt \\ &\leqslant \frac{3c}{3\eta}\int_0^{3\eta} |b(x+t) - b(x)|\,dt = o(1)\end{aligned}$$

καθώς το $\eta \to 0$. Δηλαδή, σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}\setminus\Omega^*$ έχουμε

$$\left|\int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\tan\frac{x-t}{2}}\,dt\right| = o(1) \tag{7.3.10}$$

καθώς το $\eta \to 0$.

(β) $x+\varepsilon \in I_j$: Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι

$$\left|\int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\tan\frac{x-t}{2}}\,dt\right| = o(1) \tag{7.3.11}$$

καθώς το $\varepsilon \to 0$.

(γ) $I_j \subseteq [x+\eta, x+\varepsilon]$: Χρησιμοποιώντας την $\int_{I_j} b(t)\,dt = 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j} \frac{b(t)}{2\tan\frac{x-t}{2}}\,dt &= \int_{I_j} \frac{b(t)}{2\tan\frac{x-t}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{I_j} b(t)\left(\frac{1}{\tan\frac{x-t}{2}} - \frac{1}{\tan\frac{x-x_j}{2}}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{I_j} b(t)k(t,x,x_j)\,dt,\end{aligned} \tag{7.3.12}$$

όπου x_j είναι το μέσο του I_j και

$$k(t,x,x_j)=\frac{1}{\tan\frac{x-t}{2}}-\frac{1}{\tan\frac{x-x_j}{2}}=\frac{\sin\frac{t-x_j}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}\,\sin\frac{x-x_j}{2}}. \tag{7.3.13}$$

Παρατηρούμε ότι, αφού $x\notin 2I_j$, για κάθε $t\in I_j$ έχουμε $\min\{|x-x_j|,|x-t|\}\geqslant L_j/2$, άρα

$$|x-t|\leqslant |x-x_j|+|x_j-t|\leqslant |x-x_j|+L_j/2\leqslant 2|x-x_j|$$

και

$$|x-x_j|\leqslant |x-t|+|t-x_j|\leqslant |x-t|+L_j/2\leqslant 2|x-t|.$$

Επειδή οι ποσότητες $|x-t|,|x-x_j|,|x_j-t|$ είναι μικρές όταν τα η,ε είναι μικρά (λόγω της $I_j\subseteq[x+\eta,x+\varepsilon]$) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα ημίτονα με τα ορίσματά τους, και έτσι καταλήγουμε στο φράγμα

$$|k(t,x,x_j)|\leqslant c_1\frac{|x_j-t|}{|x-t|\,|x-x_j|}\leqslant c_2\frac{L_j}{(x-x_j)^2},$$

αφού $|t-x_j|\leqslant L_j/2$ για κάθε $t\in I_j$ και $|x-t|\simeq|x-x_j|$.

Τελικά,

$$\begin{aligned}\left|\int_{(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j}\frac{b(t)}{2\tan\frac{x-t}{2}}\,dt\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_{I_j}|b(t)|\,|k(t,x,x_j)|\,dt\\ &\leqslant c_3\frac{L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|b(t)|\,dt\\ &\leqslant c_3\frac{L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|f(t)|\,dt.\end{aligned} \tag{7.3.14}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε: σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{T}\setminus\Omega^*$ και καθώς τα $\eta,\varepsilon\to 0$,

$$\begin{aligned}|H_\varepsilon b(x)-H_\eta b(x)| &\leqslant \sum_{\{j:I_j\subseteq[x-\varepsilon,x-\eta]\}}\frac{c_3L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|f(t)|\,dt\\ &\quad+\sum_{\{j:I_j\subseteq[x+\eta,x+\varepsilon]\}}\frac{c_3L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|f(t)|\,dto(1)\\ &\leqslant c_3\Delta(f,x)+o(1),\end{aligned} \tag{7.3.15}$$

όπου

$$\Delta(f,x)=\sum_j\frac{L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|f(t)|\,dt,\qquad x\in\mathbb{T}\setminus\Omega^*. \tag{7.3.16}$$

Αν δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^*}\Delta(f,x)\,dx<+\infty, \tag{7.3.17}$$

τότε θα συμπεράνουμε ότι

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0} |H_\varepsilon b(x) - H_\eta b(x)| < +\infty, \tag{7.3.18}$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}\setminus\Omega^*$, δηλαδή τον Ισχυρισμό 2.

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $x\in\mathbb{T}\setminus\Omega^*$ τότε $x\notin 2I_j$ για κάθε j, άρα $|x-x_j|\geqslant L_j$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^*} \frac{L_j}{(x-x_j)^2}\,dx \leqslant \int_{\mathbb{T}\setminus 2I_j} \frac{L_j}{(x-x_j)^2}\,dx \leqslant 2L_j\int_{L_j}^{\infty}\frac{ds}{s^2} = \frac{2}{L_j},$$

άρα

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^*}\Delta(f,x)\,dx &= \sum_j\left(\int_{I_j}|f(t)|\,dt\right)L_j\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^*}\frac{L_j}{(x-x_j)^2}\,dx\\ &\leqslant \sum_j\left(\int_{I_j}|f(t)|\,dt\right)L_j\cdot\frac{2}{L_j}\\ &\leqslant 2\sum_j\int_{I_j}|f(t)|\,dt \leqslant 2\int_\Omega |f(t)|\,dt\\ &\leqslant 4\pi\,\|f\|_1.\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

Έτσι, η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Έστω $x\in\mathbb{T}\setminus\Omega$ για το οποίο $\Delta(f,x)<+\infty$. Θεωρούμε τυχόν $N\in\mathbb{N}$. Για $\varepsilon,\eta>0$ αρκετά μικρά, έχουμε $(x-\varepsilon,x-\eta)\cap I_j=\emptyset$ και $(x+\eta,x+\varepsilon)\cap I_j=\emptyset$ για κάθε $j=1,\dots,N$. Άρα,

$$\begin{aligned}|H_\varepsilon b(x)-H_\eta b(x)| &\leqslant \sum_{\{j:I_j\subseteq[x-\varepsilon,x-\eta]\}}\frac{c_3L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|f(t)|\,dt\\ &\quad+\sum_{\{j:I_j\subseteq[x+\eta,x+\varepsilon]\}}\frac{c_3L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|f(t)|\,dto(1)\\ &\leqslant \sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|f(t)|\,dt.\end{aligned} \tag{7.3.20}$$

Αφού $\Delta(f,x)<+\infty$, έχουμε

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{L_j}{(x-x_j)^2}\int_{I_j}|f(t)|\,dt = 0.$$

Άρα,

$$\limsup_{\varepsilon,\eta\to 0}|H_\varepsilon b(x)-H_\eta b(x)| = 0,$$

και η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 είναι πλήρης. Με δεδομένο τον Ισχυρισμό 1, έχουμε αποδείξει το θεώρημα. □

Παρατηρήσεις 7.3.2. (α) Από την (7.3.19) και την ανισότητα του Markov βλέπουμε ότι, για κάθε $\lambda > 0$,

$$m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^* : \Delta(f,x) > \lambda\}) \leqslant \frac{c}{\lambda} \int_{\Omega} |f(t)|\, dt. \tag{7.3.21}$$

(β) Έστω $\lambda > \|f\|_1$ και $b = b_\lambda$. Παίρνοντας $\varepsilon \to \pi^-$ και εξετάζοντας προσεκτικά την παραπάνω απόδειξη βλέπουμε ότι, σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} |H_\eta b(x)| &\leqslant c_1 \Delta(f,x) + \frac{c_2}{\eta} \int_{x+\eta}^{x+3\eta} |b(t)|\, dt + \frac{c_2}{\eta} \int_{x-3\eta}^{x-\eta} |b(t)|\, dt \\ &\leqslant C\ (\Delta(f,x) + Mb(x)) \end{aligned} \tag{7.3.22}$$

για κάθε $0 < \eta < \pi$. Αφήνοντας το $\eta \to 0^+$ βλέπουμε επίσης ότι, σχεδόν παντού στο $\mathbb{T} \setminus \Omega^*$ έχουμε

$$|Hb(x)| \leqslant C\, \Delta(f,x). \tag{7.3.23}$$

7.4 Ο μετασχηματισμός Hilbert στον $L^p(\mathbb{T})$

Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε ότι ο μετασχηματισμός Hilbert Hf ορίζεται καλά για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι δεν είναι, γενικά, ολοκληρώσιμη συνάρτηση: θεωρούμε μια μη αρνητική συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ η οποία μηδενίζεται έξω από το $[0, \pi/2)$. Τότε, για κάθε $x \in [-\pi/2, 0)$ έχουμε

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{2\tan((x-t)/2)}\, dt.$$

Στο παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε $x < 0$ και $t > 0$, άρα $\tan((x-t)/2) = -\tan((|x|+t)/2)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} Hf(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{2\tan((|x|+t)/2)}\, dt \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{|x|} \frac{f(t)}{2\tan(|x|/2)}\, dt \\ &\geqslant \frac{c}{|x|} \int_0^{|x|} f(t)\, dt. \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Αν τώρα επιλέξουμε $d(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\ln(1/t)}\right)$ μπορούμε να ελέγξουμε ότι $f \geqslant 0$, $f \in L^1(\mathbb{T})$ και η Hf δεν είναι ολοκληρώσιμη (άσκηση).

Όπως όμως συμβαίνει και με την μεγιστική συνάρτηση, έχουμε την εξής ανισότητα ασθενούς τύπου:

Θεώρημα 7.4.1. *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $0 < \varepsilon < \pi$ και $\lambda > 0$,*

$$m(\{x : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{C}{\lambda} \|f\|_1. \tag{7.4.2}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda > \|f\|_1$. Πράγματι, αν $\lambda \leqslant \|f\|_1$ μπορούμε να γράψουμε

$$m(\{x : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\}) \leqslant 2\pi \leqslant \frac{2\pi}{\lambda}\,\|f\|_1. \tag{7.4.3}$$

Θεωρούμε λοιπόν $\lambda > \|f\|_1$ και την διάσπαση Calderón-Zygmund $f = g + b$ της f στο επίπεδο λ. Αφού

$$\{x : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \subseteq \Omega^*_\lambda \cup \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\}, \tag{7.4.4}$$

αρκεί να εκτιμήσουμε τα $m(\Omega^*_\lambda)$ και $m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\})$. Θυμηθείτε ότι

$$\begin{aligned} m(\Omega^*_\lambda) &\leqslant \sum_j m(2I_j) = 2\sum_j m(I_j) \leqslant \frac{2}{\lambda}\sum_j \int_{I_j} |f(y)|\,dy \\ &\leqslant \frac{4\pi}{\lambda}\,\|f\|_1. \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

Για το δεύτερο σύνολο, για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda$ γράφουμε

$$H_\varepsilon f(x) = H_\varepsilon g(x) + H_\varepsilon b(x). \tag{7.4.6}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \\ &\qquad \subseteq \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : |H_\varepsilon g(x)| > \lambda/2\} \cup \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : |H_\varepsilon b(x)| > \lambda/2\}. \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

Γνωρίζουμε ότι $g \in L^2(\mathbb{T})$, άρα $H_\varepsilon g \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|H_\varepsilon g\|_2 \leqslant c_1\|g\|_2$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{4} m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : |H_\varepsilon g(x)| > \lambda/2\}) &\leqslant \int_{\mathbb{T}} |H_\varepsilon g(x)|^2 dx \leqslant c_1^2 \int_{\mathbb{T}} |g(x)|^2 dx \\ &\leqslant c_2\lambda \int_{\mathbb{T}} |g(x)|\,dx \leqslant c_3\lambda\|f\|_1. \end{aligned} \tag{7.4.8}$$

Άρα,

$$m(\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : |H_\varepsilon g(x)| > \lambda/2\}) \leqslant \frac{4c_3}{\lambda}\,\|f\|_1. \tag{7.4.9}$$

Για το δεύτερο σύνολο στην (7.4.7) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$|H_\varepsilon b(x)| \leqslant c_4(\Delta(f, x) + Mb(x)) \tag{7.4.10}$$

για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda$. Άρα,

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : |H_\varepsilon b(x)| > \lambda/2\} \\ &\qquad \subseteq \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : \Delta(f, x) > \lambda/(4c_4)\} \cup \{x \in \mathbb{T} \setminus \Omega^*_\lambda : Mb(x) > \lambda/(4c_4)\}. \end{aligned} \tag{7.4.11}$$

Όμως,

$$\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega_\lambda^*} \Delta(f,x)\,dx \leqslant c_5\|f\|_1, \tag{7.4.12}$$

άρα

$$m(\{x\in\mathbb{T}\setminus\Omega_\lambda^* : \Delta(f,x) > \lambda/(4c_4)\}) \leqslant \frac{c_6}{\lambda}\,\|f\|_1. \tag{7.4.13}$$

Επίσης, για την μεγιστική συνάρτηση Mb της b γνωρίζουμε ότι

$$m(\{x\in\mathbb{T}\setminus\Omega_\lambda^* : Mb(x) > \lambda/(4c_4)\}) \leqslant \frac{c_7}{\lambda}\,\|b\|_1 \leqslant \frac{c_8}{\lambda}\,\|f\|_1. \tag{7.4.14}$$

Συνδυάζοντας όλες αυτές τις εκτιμήσεις έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Θεώρημα 7.4.2. *Για κάθε $1 < p < 2$ υπάρχει σταθερά $C_p = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$ ώστε: για κάθε $f\in L^p(\mathbb{T})$ η $Hf\in L^p(\mathbb{T})$ και*

$$\|Hf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p. \tag{7.4.15}$$

Επιπλέον, $Hf(x) = \tilde{f}(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Συνεπώς, έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Έχουμε δεί ότι για κάθε $f\in L^2(\mathbb{T})$ ισχύει $\|Hf\|_2 \leqslant c_1\|f\|_2$. Δηλαδή, ο H είναι ισχυρού τύπου $(2,2)$. Από το Θεώρημα 7.4.1, για κάθε $f\in L^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $\lambda>0$ έχουμε

$$m(\{x : |Hf(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{c_2}{\lambda}\|f\|_1.$$

Συνεπώς, ο H είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$. Από το θεώρημα του Marcinkiewicz, για κάθε $1 < p < 2$ ο H είναι ισχυρού τύπου (p,p) με σταθερά $C_p = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$. Δηλαδή, για κάθε $f\in L^p(\mathbb{T})$, $1<p<2$,

$$\|Hf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p. \tag{7.4.16}$$

Μένει να δείξουμε ότι $Hf(x) = \tilde{f}(x)$ σχεδόν παντού. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε την $f(x) - \sigma_n(f,x)$. Αφού $\sigma_n(f)\in L^2(\mathbb{T})$ και $H\sigma_n(f) = \tilde{\sigma}_n(f)$, έχουμε

$$H(f-\sigma_(f))(x) = Hf(x) - \tilde{\sigma}_n(f,x) \tag{7.4.17}$$

σχεδόν παντού. Από την (7.4.16) παίρνουμε

$$\|Hf - \tilde{\sigma}_n(f)\|_p \leqslant C_p\|f-\sigma_n(f)\|_p. \tag{7.4.18}$$

Από το θεώρημα του Fejér έχουμε $\|f-\sigma_n(f)\|_p\to 0$, άρα $\|Hf-\tilde{\sigma}_n(f)\|_p\to 0$. Ειδικότερα, $\|Hf-\tilde{\sigma}_n(f)\|_1\to 0$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} c_k(\tilde{\sigma}_n(f)) = c_k(Hf) \tag{7.4.19}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Όμως,

$$\tilde{\sigma}_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)e^{ikx},$$

άρα, για $n > |k|$ έχουμε

$$c_k(\tilde{\sigma}_n(f)) = \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f) \to (-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f) \tag{7.4.20}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι $c_k(Hf) = (-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άρα $\tilde{f} = Hf \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|\tilde{f}\|_p = \|Hf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$. □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 7.4.2 με τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.2 έχουμε άμεσα το εξής.

Θεώρημα 7.4.3. *Για κάθε $1 < p < 2$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,*

$$\|f - s_n(f)\|_p \to 0 \tag{7.4.21}$$

καθώς το $n \to \infty$. □

Περνάμε τώρα στην περίπτωση $2 < p < \infty$.

Θεώρημα 7.4.4. *Για κάθε $2 < p < \infty$ υπάρχει σταθερά $C_p = O(p)$ ώστε: για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ η $Hf \in L^p(\mathbb{T})$ και*

$$\|Hf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p. \tag{7.4.22}$$

Επιπλέον, $Hf(x) = \tilde{f}(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Συνεπώς, έχουμε συζυγία στον $L^p(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Αφού $p > 2$ έχουμε $L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$. Συνεπώς, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ έχουμε $\tilde{f} = Hf \in L^2(\mathbb{T})$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $Hf \in L^p(\mathbb{T})$ και ότι $\|Hf\|_p \leqslant Cp\|f\|_p$.

Θυμηθείτε ότι, για τον σκοπό αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|\sigma_n(\tilde{f})\|_p \leqslant Cp\|f\|_p \tag{7.4.23}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον συζυγή εκθέτη q του p και δείχνουμε ότι, για κάθε $g \in L^q(\mathbb{T})$ με $\|g\|_q \leqslant 1$ ισχύει

$$|\langle \sigma_n(\tilde{f}), g\rangle| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_n(\tilde{f},t)\overline{g(t)}\,dt\right| \leqslant Cp\|f\|_p. \tag{7.4.24}$$

Λόγω της πυκνότητας των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $L^q(\mathbb{T})$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η g είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε, $\sigma_n(\tilde{f}), g \in L^2(\mathbb{T})$, οπότε η ταυτότητα του Parseval μας δίνει

$$|\langle \sigma_n(\tilde{f}), g\rangle| = \left| \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(\operatorname{sign} k)c_k(f)\overline{c_k(g)} \right| \tag{7.4.25}$$
$$= \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)(-i)(\operatorname{sign} k)c_k(g)} \right|$$
$$= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{\sigma_n(\tilde{g},t)}\,dt \right|$$
$$= |\langle f, \sigma_n(\tilde{g})\rangle|.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder και την $\|\sigma_n(\tilde{g})\|_q \leqslant \|\tilde{g}\|_q$ παίρνουμε

$$|\langle \sigma_n(\tilde{f}), g\rangle| \leqslant \|\sigma_n(\tilde{g})\|_q\|f\|_p \leqslant \|\tilde{g}\|_q\|f\|_p \leqslant C_q\|g\|_q\|f\|_p \tag{7.4.26}$$

όπου $C_q = O\left(\frac{1}{q-1}\right) = O\left(\frac{p}{q}\right) = O(p)$ καθώς το $q \to 1$ (δηλαδή, καθώς το $p \to \infty$). Έπεται ότι

$$\|\sigma_n(\tilde{f})\|_p = \sup\left\{|\langle \sigma_n(\tilde{f}), g\rangle| : \|g\|_q \leqslant 1\right\} \leqslant Cp\|f\|_p. \tag{7.4.27}$$

Το θεώρημα είναι τώρα άμεση συνέπεια της (7.4.22). □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 7.4.4 με τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.2 έχουμε το εξής.

Θεώρημα 7.4.5. *Για κάθε $2 < p < \infty$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,*

$$\|f - s_n(f)\|_p \to 0 \tag{7.4.28}$$

καθώς το $n \to \infty$. □

7.5 Η κλάση $L \ln L$ του Zygmund

Στην τελευταία παράγραφο αυτού του Κεφαλαίου κοιτάζουμε πιο προσεκτικά τους υπογραμμικούς τελεστές που είναι ταυτόχρονα ασθενούς τύπου $(1,1)$ και ισχυρού τύπου (∞,∞). Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν απλό χαρακτηρισμό τους.

Πρόταση 7.5.1. *Ένας υπογραμμικός τελεστής T ορισμένος στον $L^1(\mathbb{T}) + L^\infty(\mathbb{T})$ είναι ταυτόχρονα ασθενούς τύπου $(1,1)$ και ισχυρού τύπου (∞,∞) αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $\lambda > 0$,*

$$m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{c_1}{\lambda}\int_{\lambda/c_2}^{\infty} m(\{x : |f(x)| > t\})\,dt. \tag{7.5.1}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της (7.5.1) επαναλαμβάνουμε μέρος της απόδειξης του θεωρήματος του Marcinkiewicz στην ειδική περίπτωση $p_0 = 1$ και $p_1 = \infty$. Επιλέγουμε από την αρχή $\delta = \frac{1}{2A}$, όπου A είναι η σταθερά στην ανισότητα ισχυρού τύπου (∞, ∞). Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$f_0^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| > \lambda/2A \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$f_1^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| \leqslant \lambda/2A \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|Tf_1^\lambda\|_\infty \leqslant A\|f_1^\lambda\|_\infty \leqslant \lambda/2. \tag{7.5.2}$$

Συνεπώς, από την

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) &\leqslant m(\{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\}) + m(\{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\}) \\ &= m(\{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\}). \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

Από την ανισότητα ασθενούς τύπου $(1,1)$ έχουμε

$$m(\{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\}) \leqslant c\frac{c_1}{\lambda}\int_{\{x:|f(x)|>\lambda/c_2} |f(x)|\,dx. \tag{7.5.4}$$

Με αλλαγή μεταβλητής και των σταθερών c_1, c_2 έχουμε την (7.5.1). Αντίστροφα, αν δεχτούμε την (7.5.1) τότε, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ παίρνουμε την ανισότητα ασθενούς τύπου $(1,1)$ αντικαθιστώντας το λ/c_2 με 0. Επίσης, για κάθε $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ παρατηρούμε ότι $m(\{x : |f(x)| > s\}) = 0$ αν $s \geqslant \|f\|_\infty$, άρα το ολοκλήρωμα μηδενίζεται αν $\lambda \geqslant c_2\|f\|_\infty$. Συνεπώς, έχουμε $m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) = 0$ αν $\lambda \geqslant c_2\|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\|Tf\|_\infty \leqslant c_2\|f\|_\infty$. $\square$

Η ανισότητα (7.5.1) δίνει αρκετές πληροφορίες για την ολοκληρωσιμότητα της Tf. Για παράδειγμα, αν $f \in \bigcup_{p>1} L^p(\mathbb{T})$ τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $Tf \in L^1(\mathbb{T})$. Όμως, αυτό δεν είναι το βέλτιστο αποτέλεσμα. Η κατάλληλη κλάση για το ερώτημα είναι η κλάση $L\ln L$ του Zygmund, την οποία ορίζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 7.5.2 (η κλάση $L\ln L$ του Zygmund)**.** Λέμε ότι μια μετρήσιμη συνάρτηση f ανήκει στην κλάση $L\ln L(\mathbb{T})$ αν

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)|\,\ln^+|f(x)|\,dx = \int_0^\infty m(\{x : |f(x)| > \lambda\})\,\frac{d(\lambda\ln^+\lambda)}{d\lambda} < \infty,$$

όπου $\ln^+ t = \ln t$ αν $t \geqslant 1$ και $\ln^+ t = 0$ αλλιώς.

Θεώρημα 7.5.3. *Έστω T ένας υπογραμμικός τελεστής, ορισμένος στον $L^1(\mathbb{T}) + L^\infty(\mathbb{T})$, ο οποίος είναι ταυτόχρονα ασθενούς τύπου $(1,1)$ και ισχυρού τύπου (∞,∞). Τότε, ο T απεικονίζει τον $L \ln L(\mathbb{T})$ στον $L^1(\mathbb{T})$, και*

$$\|Tf\|_1 \leqslant c + c\int_{\mathbb{T}} |f(x)| \ln^+ |f(x)|\, dx, \tag{7.5.5}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού $m(\{x : |Tf(x)| \leqslant 1\}) \leqslant 2\pi$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$I := \int_{\{|Tf|>1\}} |Tf(x)|\, dx \leqslant c\int_{\mathbb{T}} |f(x)| \ln^+ |f(x)|\, dx \tag{7.5.6}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$.

Χρησιμοποιώντας την (7.5.1) και το θεώρημα Tonelli γράφουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\})\, d\lambda \qquad \leqslant c\int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\int_{c\lambda}^\infty m(\{x : |f(x)| > s\})\, ds\, d\lambda \\ &= c_1\int_c^\infty m(\{x : |f(x)| > s\})\int_1^{s/c}\frac{d\lambda}{\lambda}\, ds \\ &= c_1\int_c^\infty m(\{x : |f(x)| > s\})\, ln^+(s/c)\, ds, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα. □

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 7.5.3 είναι βέλτιστο, όπως φαίνεται από το επόμενο θεώρημα σχετικά με τον μεγιστικό τελεστή Hardy-Littlewood.

Θεώρημα 7.5.4. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $Mf \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, $f \in L \ln L(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι, για κάθε $\lambda < \|f\|_1$,

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\, dx \leqslant m(\{x : Mf(x) > \lambda\}). \tag{7.5.7}$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε την διάσπαση Calderón-Zygmund της f στο επίπεδο λ, για κάθε j έχουμε

$$\lambda < \frac{1}{m(I_j)}\int_{I_j} |f(x)|\, dx \leqslant 2\lambda \tag{7.5.8}$$

και

$$|f(x)| \leqslant \lambda \ \text{ σχεδόν παντού στο } \ \mathbb{T}\setminus\bigcup_j I_j. \tag{7.5.9}$$

Από την αριστερή ανισότητα στην (7.5.8) βλέπουμε ότι $\bigcup_j I_j \subseteq \{x : Mf(x) > \lambda\}$, ενώ από την δεξιά ανισότητα έχουμε

$$\int_{\bigcup_j I_j} |f(x)|\, dx \leqslant 2\lambda\, m\left(\bigcup_j I_j\right) \leqslant 2\lambda\, m(\{x : Mf(x) > \lambda\}). \tag{7.5.10}$$

Επιπλέον, αφού από την (7.5.9) έχουμε $\{x : |f(x)| > \lambda\} \subseteq \bigcup_j I_j$, από την (7.5.10) παίρνουμε αμέσως την (7.5.7). Ολοκληρώνοντας αυτήν την ανισότητα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\|f\|_1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\, dx\, d\lambda &= \int_{\{x:|f(x)|>\|f\|_1\}} |f(x)| \int_{\|f\|_1}^{|f(x)|} \frac{d\lambda}{\lambda}\, dx \\ &\leqslant 2\int_0^{\infty} m(\{x : Mf(x) > \lambda\})\, d\lambda,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα του θεωρήματος. □

Κεφάλαιο 8

Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz και η ανισότητα Hausdorff-Young

8.1 Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz

Έστω (p_0, q_0) και (p_1, q_1) δύο ζεύγη δεικτών με $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty$. Ας υποθέσουμε ότι

$$\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0} \quad \text{και} \quad \|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1},$$

όπου T είναι ένας γραμμικός τελεστής. Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να πούμε ότι

$$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p$$

για άλλα ζεύγη (p, q). Όπως θα δούμε, αυτή η ανισότητισχύει αν οι τιμές των p και q ικανοποιούν κατάλληλη γραμμική σχέση στην οποία εμφανίζονται οι αντίστροφοι των δεικτών p_0, p_1, q_0 και q_1.

Για την ακριβή διατύπωση του θεωρήματος εισάγουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό. Έστω (X, μ) και (Y, ν) δύο χώροι μέτρου. Θεωρούμε τον χώρο $L^{p_0} + L^{p_1}$ όλων των συναρτήσεων f στον (X, μ) που γράφονται στη μορφή $f = f_0 + f_1$ για κάποιες $f_0 \in L^{p_0}(X, \mu)$ και $f_1 \in L^{p_1}(X, \mu)$. Ομοίως ορίζουμε τον χώρο $L^{q_0} + L^{q_1}$ (που αποτελείται από συναρτήσεις στον (Y, ν)).

Θεώρημα 8.1.1 (Riesz)**.** *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής από τον $L^{p_0} + L^{p_1}$ στον $L^{q_0} + L^{q_1}$. Υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος από τον L^{p_0} στον L^{q_0} και από τον L^{p_1} στον L^{q_1}. Δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $M_0, M_1 > 0$ ώστε*

$$\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0} \quad \text{για κάθε } f \in L^{p_0}$$

και

$$\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1} \quad \text{για κάθε } f \in L^{p_1}.$$

Αν το ζεύγος (p,q) ικανοποιεί τις

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1} \quad \textit{και} \quad \frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}$$

για κάποιον $0\leqslant t\leqslant 1$, τότε ο T είναι φραγμένος από τον L^p στον L^q, και

$$\|T(f)\|_q\leqslant M\|f\|_p$$

για κάθε $f\in L^p$. Επιπλέον, $M\leqslant M_0^{1-t}M_1^t$.

Πρέπει να τονίσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για L^p-χώρους συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές, διότι η απόδειξή του χρησιμοποιεί τεχνικές μιγαδικής ανάλυσης. Ξεκινώντας από τη λωρίδα $0\leqslant \mathrm{Re}\,(z)\leqslant 1$ στο μιγαδικό επίεδο, θα ορίσουμε μια αναλυτική συνάρτηση Φ που σχετίζεται με τον T, τέτοια ώστε οι υποθέσεις $\|T(f)\|_{q_0}\leqslant M_0\|f\|_{p_0}$ και $\|T(f)\|_{q_1}\leqslant M_1\|f\|_{p_1}$ να μεταφράζονται σε κάποια φράγματα για την Φ στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z)=0$ και $\mathrm{Re}\,(z)=1$ αντίστοιχα. Κατόπιν, το συμπέρασμα θα προκύψει από το γεγονός ότι η Φ θα είναι φραγμένη στο σημείο t του πραγματικού άξονα.

Η ανάλυσή μας για την Φ θα βασιστεί στο εξής λήμμα.

Λήμμα 8.1.2 (το λήμμα των τριών ευθειών). *Έστω $\Phi(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση στη λωρίδα $S=\{z\in\mathbb{C}:0<\mathrm{Re}\,(z)<1\}$, η οποία είναι επίσης συνεχής και φραγμένη στην κλειστή θήκη της S. Αν*

$$M_0=\sup_{y\in\mathbb{R}}|\Phi(iy)| \quad \textit{και} \quad M_1=\sup_{y\in\mathbb{R}}|\Phi(1+iy)|,$$

τότε

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}|\Phi(t+iy)|\leqslant M_0^{1-t}M_1^t$$

για κάθε $0\leqslant t\leqslant 1$.

Απόδειξη. Κάνουμε αρχικά την επιπλέον υπόθεση ότι $M_0=M_1=1$ και $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\Phi(x+iy)|\to 0$ καθώς το $|y|\to\infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε $M=\sup|\Phi(z)|$ όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα z στην κλειστή θήκη της S. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M>0$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{z_n\}$ σημείων της S με $|\Phi(z_n)|\to M$ καθώς το $n\to\infty$. Λόγω της υπόθεσής μας για την Φ, η ακολουθία $\{z_n\}$ δεν μπορεί να τείνει στο απειρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{z_{k_n}\}$ της $\{z_n\}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο z_0 στην κλειστή θήκη της S. Από την αρχή του μεγίστου, το z_0 δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο της λωρίδας (αλλιώς, η Φ είναι σταθερή και το συμπέρασμα έπεται κατά προφανή τρόπο). Άρα, το z_0 ανήκει στο σύνορο της S, όπου έχουμε $|\Phi|\leqslant 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι $M\leqslant 1$ και έχουμε το ζητούμενο γι' αυτήν την ειδική περίπτωση.

Αν απλώς υποθέσουμε ότι $M_0=M_1=1$, ορίζουμε

$$\Phi_\epsilon(z)=\Phi(z)e^{\epsilon(z^2-1)}, \qquad \epsilon>0.$$

Χρησιμοποιώντας την $e^{\epsilon[(x+iy)^2-1]}=e^{\epsilon(x^2-1-y^2+2ixy)}$, βλέπουμε ότι $|\Phi_\epsilon(z)|\leqslant 1$ στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z)=0$ και $\mathrm{Re}\,(z)=1$. Επιπλέον,

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\Phi_\epsilon(x+iy)|\to 0 \ \text{ καθώς το } \ |y|\to\infty,$$

αφού η Φ είναι φραγμένη. Συνεπώς, από την πρώτη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι $|\Phi_\epsilon(z)| \leqslant 1$ για κάθε z στην κλειστή θήκη της S. Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$, βλέπουμε ότι $|\Phi| \leqslant 1$ όπως θέλαμε.

Τέλος, αν δεν έχουμε κάποια πρόσθετη πληροφορία για τις τιμές των M_0 και M_1, ορίζουμε $\tilde{\Phi}(z) = M_0^{z-1}M_1^{-z}\Phi(z)$, και παρατηρούμε ότι η $\tilde{\Phi}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της προηγούμενης περίπτωσης: η $|\tilde{\Phi}|$ είναι φραγμένη από 1 στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Άρα, $|\tilde{\Phi}(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in S$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.1. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος στην περίπτωση που η f είναι απλή συνάρτηση. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p = 1$.

Θεωρούμε τον συζυγή εκθέτη q^* του q και θα δείξουμε ότι

$$\left|\int (Tf)\cdot g\,d\nu\right| \leqslant M\|f\|_p\|g\|_{q^*} \tag{8.1.1}$$

για κάθε $g \in L^{q^*}(Y,\nu)$. Αν αποδείξουμε την (8.1.1), από δυϊσμό έπεται ότι

$$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p.$$

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $p < \infty$ και $q > 1$. Θεωρούμε απλή συνάρτηση $f \in L^p$, και ορίζουμε

$$f_z = |f|^{\gamma(z)}\frac{f}{|f|} \quad \text{όπου} \quad \gamma(z) = p\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)$$

και

$$g_z = |g|^{\delta(z)}\frac{g}{|g|} \quad \text{όπου} \quad \delta(z) = q^*\left(\frac{1-z}{q_0^*} + \frac{z}{q_1^*}\right),$$

με τους q^*, q_0^* και q_1^* να συμβολίζουν τους συζυγείς εκθέτες των q, q_0 και q_1 αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι $f_t = f$ και

$$\|f_z\|_{p_0} = 1 \quad \text{αν} \quad \mathrm{Re}\,(z) = 0$$

ενώ

$$\|f_z\|_{p_1} = 1 \quad \text{αν} \quad \mathrm{Re}\,(z) = 1.$$

Όμοια, $\|g_z\|_{q_0^*} = 1$ αν $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\|g_z\|_{q_1^*} = 1$ αν $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Επίσης, $g_t = g$. Το τέχνασμα είναι να θεωρήσουμε την

$$\Phi(z) = \int (Tf_z)\cdot g_z\,d\nu.$$

Αφού η f είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής $f = \sum_k a_k\chi_{E_k}$ με τα σύνολα E_k να είναι ξένα και να έχουν πεπερασμένο μέτρο, βλέπουμε ότι η f_z είναι επίσης απλή, και

$$f_z = \sum_k |a_k|^{\gamma(z)}\frac{a_k}{|a_k|}\chi_{E_k}.$$

Αφού η $g = \sum_j b_j\chi_{F_j}$ είναι επίσης απλή, έχουμε

$$g_z = \sum_j |b_j|^{\delta(z)}\frac{b_j}{|b_j|}\chi_{F_j}.$$

Συνεπώς,

$$\Phi(z) = \sum_{j,k} |a_k|^{\gamma(z)} |b_j|^{\delta(z)} \frac{a_k}{|a_k|} \frac{b_j}{|b_j|} \left(\int T(\chi_{E_k}) \chi_{F_j} \, d\nu \right),$$

άρα η συνάρτηση Φ είναι ολόμορφη στη λωρίδα $0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1$, και είναι φραγμένη και συνεχής στην κλειστή της θήκη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο T είναι φραγμένος στον L^{p_0} με νόρμα M_0, βλέπουμε ότι αν $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ τότε

$$|\Phi(z)| \leqslant \|T(f_z)\|_{q_0} \|g_z\|_{q_0^*} \leqslant M_0 \|f_z\|_{p_0} = M_0.$$

Όμοια βλέπουμε ότι $|\Phi(z)| \leqslant M_1$ στην ευθεία $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Από το λήμμα των τριών ευθειών συμπεραίνουμε ότι η $|\Phi|$ φράσσεται από $M_0^{1-t} M_1^t$ στην ευθεία $\mathrm{Re}\,(z) = t$. Αφού $\Phi(t) = \int (Tf) g \, d\nu$, έχουμε το ζητούμενο, τουλάχιστον στην περίπτωση που η f είναι απλή.

Γενικά, αν $f \in L^p$ και $1 \leqslant p < \infty$, επιλέγουμε μια ακολουθία $\{f_m\}$ απλών συναρτήσεων στον L^p έτσι ώστε $\|f_n - f\|_p \to 0$. Αφού $\|T(f_n)\|_q \leqslant M \|f_n\|_p$, βλέπουμε ότι η $\{T(f_n)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον L^q. Αν δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} T(f_n) = T(f)$ σχεδόν παντού, τότε θα έχουμε και $\|T(f)\|_q \leqslant M \|f\|_p$.

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε $f = f^U + f^L$, όπου $f^U(x) = f(x)$ αν $|f(x)| \geqslant 1$ και $f^U(x) = 0$ αλλιώς, ενώ $f^L(x) = f(x)$ αν $|f(x)| < 1$ και $f^L(x) = 0$ αλλιώς. Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε κάθε f_n σαν άθροισμα $f_n = f_n^U + f_n^L$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_0 \leqslant p_1$ (η περίπτωση $p_0 \geqslant p_1$ εξετάζεται με ανάλογο τρόπο). Τότε, $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$, και αφού $f \in L^p$ έχουμε $f^U \in L^{p_0}$ και $f^L \in L^{p_1}$. Επιπλέον, αφού $\|f_n - f\|_p \to 0$, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\|f_n^U - f^U\|_{p_0} \to 0$ και $\|f_n^L - f^L\|_{p_1} \to 0$. Από την υπόθεση, $T(f_n^U) \to T(f^U)$ στον L^{q_0} και $T(f_n^L) \to T(f^L)$ στον L^{q_1}. ερνώντας σε κατάλληλες υπακολουθίες βλέπουμε ότι η $T(f_n) = T(f_n^U) + T(f_n^L)$ συγκλίνει στην $T(f)$ σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

(β) Μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $q = 1$ και $p = \infty$. Στην περίπτωση $p = \infty$ έχουμε αναγκαστικά $p_0 = p_1 = \infty$, οπότε οι υποθέσεις $\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_\infty$ και $\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_\infty$ σε συνδυασμό με την ανισότητα Hölder μας δίνουν

$$\|T(f)\|_q \leqslant (\|T(f)\|_{q_0})^{1-t} (\|T(f)\|_{q_1})^t \leqslant M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_\infty.$$

Τέλος, αν $p < \infty$ και $q = 1$, τότε $q_0 = q_1 = 1$ και μπορούμε επιλέγοντας $g_z = g$ για κάθε z να ακολουθήσουμε την ίδια πορεία με αυτήν της απόδειξης για την περίπτωση $q > 1$. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 8.1.3. Ένας λίγο διαφορετικός, αλλά χρήσιμος, τρόπος να δούμε το Θεώρημα 8.1.1 είναι ο εξής: υποθέτουμε ότι ο γραμμικός τελεστής T είναι αρχικά ορισμένος στις απλές συναρτήσεις του X, τις οποίες απεικονίζει σε συναρτήσεις του Y οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου. Ρωτάμε για ποιά ζεύγη (p, q) ο T είναι ισχυρού τύπου (p, q), δηλαδή υπάρχει $M = M_{p,q} > 0$ ώστε

$$\|T(f)\|_q \leqslant M \|f\|_p \tag{8.1.2}$$

για κάθε απλή συνάρτηση f. Η χρήσιμη ιδιότητα της κλάσης των απλών συναρτήσεων είναι ότι είναι η ίδια για όλους τους χώρους L^p. Επιπλέον, αν η (8.1.2) ισχύει, τότε ο T επεκτείνεται μονοσήμαντα στον L^p και αν $p < \infty$ τότε η (8.1.2) εξακολουθεί να ισχύει για κάθε $f \in L^p(\mu)$, με την ίδια σταθερά $M_{p,q}$ (το ίδιο ισχύει και για $p = \infty$ αν $\mu(X) < \infty$).

Ξεκινώντας από αυτήν την παρατήρηση, ορίζουμε το *διάγραμμα Riesz* του T να αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ για τα οποία ο T είναι ισχυρού τύπου $(1/x, 1/y)$ και θέτουμε $M_{x,y}$ την μικρότερη θετική σταθερά για την οποία ισχύει

$$\|T(f)\|_{1/y} \leqslant M_{x,y}\|f\|_{1/x} \tag{8.1.3}$$

για κάθε απλή συνάρτηση f. Με αυτήν τν ορολογία έχουμε το εξής:

Θεώρημα 8.1.4. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής ορισμένος στις απλές συναρτήσεις του X, τις οποίες απεικονίζει σε συναρτήσεις του Y οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου.*

(α) *Το διάγραμμα Riesz του T είναι κυρτό υποσύνολο του* $[0, 1] \times [0, 1]$.

(β) *Η $(x, y) \mapsto \log M_{x,y}$ είναι κυρτή συνάρτηση σε αυτό το σύνολο.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός του Θεωρήματος 8.1.4 μας λέει ότι αν $(x_0, y_0) = (1/p_0, 1/q_0)$ και $(x_1, y_1) = (1/p_1, 1/q_1)$ είναι δύο σημεία στο διάγραμμα Riesz του T, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν περιέχεται στο διάγραμμα Riesz του T. Αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 8.1.1. Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αρκεί να ελέγξουμε την κυρτότητα της $\log M_{x,y}$ σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα που περιέχεται στο διάγραμμα Riesz του T, κάτι που προκύπτει από την ανισότητα $M \leqslant M_0^{1-t}M_1^t$ του Θεωρήματος 8.1.1. □

Λόγω της διατυπωσης του Θεωρήματος 8.1.4, το Θεώρημα 8.1.1 συχνά αποκαλείται «θεώρημα κυρτότητας του Riesz».

8.2 Ανισότητα Hausdorff-Young

Θα δώσουμε τέσσερις εφαρμογές του θεωρήματος του riesz. Η πρώτη είναι η ανισότητα Hausdorff-Young για τους συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Θεώρημα 8.2.1 (ανισότητα Hausdorff-Young). *Έστω $1 \leqslant p \leqslant 2$. Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ είναι η σειρά Fourier της f, τότε*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \tag{8.2.1}$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι στην περίπτωση $p = q = 2$ η (8.2.1) ισχύει ως ισότητα, από την ταυτότητα του Parseval. Επίσης, έχουμε δεί ότι ισχύει στην περίπτωση $p = 1$ και $q = \infty$: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε

$$|c_k(f)| \leqslant \|f\|_1$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άρα $\sup\{|c_k| : k \in \mathbb{Z}\} \leqslant \|f\|_1$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.1.1 για τους χώρους $X = \mathbb{T}$ με το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue και $Y = \mathbb{Z}$ με το μέτρο αρίθμησης, το οποίο δίνει μάζα 1 σε κάθε μονοσύνολο. Θεωρούμε τον τελεστή $T : L^2(\mathbb{T}) + L^1(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{Z}) + L^\infty(\mathbb{Z})$ ο οποίος απεικονίζει την f στην ακολουθία $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ των συντελεστών Fourier της. Παρατηρήστε ότι $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, άρα $L^2(\mathbb{T}) + L^1(\mathbb{T}) = L^1(\mathbb{T})$. Επίσης, $L^2(\mathbb{Z}) \subset L^\infty(\mathbb{Z})$, άρα $L^2(\mathbb{Z}) + L^\infty(\mathbb{Z}) = L^\infty(\mathbb{Z})$.

Έχουμε $\|T(f)\|_{L^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|T(f)\|_{L^\infty(\mathbb{Z})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δηλαδή, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 8.1.1 για τα ζεύγη $(2,2)$ και $(1,\infty)$ με $M_{2,2} = 1$ και $M_{1,\infty} = 1$. Αν $p \in (1,2)$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, βλέπουμε ότι οι p, q ικανοποιούν τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{2}$$

με $t = 1 - \frac{2}{q} \in (0,1)$. Από το Θεώρημα 8.1.1 παίρνουμε αμέσως την

$$\|T(f)\|_q \leqslant M_{2,2}^{1-t} M_{1,\infty}^t \|f\|_p = \|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$. Η τελευταία ανισότητα είναι ακριβώς ισοδύναμη με την (8.2.1). □

Η δεύτερη εφαρμογή μας είναι η δυϊκή ανισότητα Hausdorff-Young:

Θεώρημα 8.2.2 (δυϊκή ανισότητα Hausdorff-Young). *Έστω $2 \leqslant q \leqslant \infty$ και έστω p ο συζυγής εκθέτης του q. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^p < \infty$, τότε $f \in L^q(\mathbb{T})$ και*

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p \right)^{1/p}. \tag{8.2.2}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι στην περίπτωση $p = q = 2$ η (8.2.2) ισχύει ως ισότητα: η υπόθεση ότι $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in L^2(\mathbb{Z})$ και το θεώρημα Riesz-Fisher εξασφαλίζουν ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$ και ότι $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\{c_k\}\|_{L^2(\mathbb{Z})}$. Η περίπτωση $p = 1$ και $q = \infty$ είναι απλή: αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$ τότε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f για την οποία έχουμε $c_k(f) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$$

για κάθε $x \in \mathbb{T}$, άρα $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant \|\{c_k\}\|_{L^1(\mathbb{Z})}$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.1.1 για τους χώρους $Q = \mathbb{Z}$ με το μέτρο αρίθμησης και $U = \mathbb{T}$ με το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε τον τελεστή $T' : L^2(\mathbb{Z}) + L^1(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T}) + L^\infty(\mathbb{T})$ ο οποίος απεικονίζει την $\{c_k\}$ στη συνάρτηση $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$. Έστω $1 < p < 2$. Παρατηρήστε ότι $L^p(\mathbb{Z}) \subset L^2(\mathbb{Z})$, άρα, αν $\{c_k\} \in L^p(\mathbb{T})$ έχουμε ότι η

$$T'(\{c_k\})(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \in L^2(\mathbb{T}).$$

Έχουμε $\|T'(\{c_k\})\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\{c_k\}\|_{L^2(\mathbb{Z})}$ αν $\{c_k\} \in L^2(\mathbb{Z})$ και $\|T'(\{c_k\})\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant \|\{c_k\}\|_{L^1(\mathbb{Z})}$ αν $\{c_k\} \in L^1(\mathbb{Z})$. Δηλαδή, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 8.1.1 για τα ζεύγη $(2,2)$ και $(1,\infty)$ με $M_{2,2} = 1$ και $M_{1,\infty} = 1$. Αφού οι p, q ικανοποιούν τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{2}$$

με $t = 1 - \frac{2}{q} \in (0,1)$, από το Θεώρημα 8.1.1 συμπεραίνουμε ότι αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty} \in L^p(\mathbb{Z})$ τότε $f \in L^q(\mathbb{T})$ και

$$\|f\|_q = \|T'(\{c_k\})\|_q \leqslant M_{2,2}^{1-t} M_{1,\infty}^t \|\{c_k\}\|_p.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ακριβώς ισοδύναμη με την (8.2.2). $\square$

Η επόμενη εφαρμογή είναι η ανισότητα Hausdorff-Young για το μετασχηματισμό Fourier στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 8.2.3 (ανισότητα Hausdorff-Young). *Έστω $1 \leqslant p \leqslant 2$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}$ επεκτείνεται μονοσήμαντα από την κλάση των απλών $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $\mathcal{F}(f) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q \leqslant \|f\|_p. \tag{8.2.3}$$

Απόδειξη. Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε ότι ο $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιεί την $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, και ότι ο ο $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιεί την $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Επίσης, οι $\mathcal{F}_1$ και $\mathcal{F}_2$ συμφωνούν στις απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Από την $1 \leqslant p \leqslant 2$ έχουμε ότι $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Άρα, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ μπορούμε να ορίσουμε την $\mathcal{F}(f)$ (εξηγήστε γιατί) και το Θεώρημα 8.1.1 μας δίνει την (8.2.3). Η μοναδικότητα της επέκτασης προκύπτει από την πυκνότητα των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Παρατήρηση 8.2.4. Αξίζει τον κόπο να δούμε το διάγραμμα Riesz που αντιστοιχεί σε καθένα από τα παραπάνω τρία θεωρήματα:

(α) Θεώρημα 8.2.1: Το διάγραμμα Riesz είναι το κλειστό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$.

(β) Θεώρημα 8.2.2: Το διάγραμμα Riesz είναι το κλειστό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$.

(γ) Θεώρημα 8.2.3: Το διάγραμμα Riesz είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$, δηλαδή το κοινό σύνορο των παραπάνω δύο τριγώνων.

Αυτό που μας δίνουν τα παραπάνω τρία θεωρήματα είναι ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$ περιέχεται στο διάγραμμα Riesz και στις τρείς πριπτώσεις. Στο Θεώρημα 8.2.1 έχουμε και το σημείο $(0,0)$ λόγω της τετριμμένης ανισότητας $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$. Από την κυρτότητα του διαγράμματος Riesz έπεται το (α). Στο Θεώρημα 8.2.2 έχουμε και το σημείο $(1,1)$ λόγω της ανισότητας $\|T'(\{c_k\}\|_1 \leqslant \|T'(\{c_k\}\|_\infty \leqslant \|\{c_k\}\|_1$. Από την κυρτότητα του διαγράμματος Riesz έπεται το (β). Το γεγονός ότι το τρίτο διάγραμμα δεν μπορεί να επεκταθεί αφήνεται ως άσκηση.

Η τελευταία μας εφαρμογή είναι η ανισότητα του Young για την συνέλιξη στον $\mathbb{R}^n$ (την οποία έχουμε ήδη σηζητήσει στις ασκήσεις του Κεφαλαίου 1).

Θεώρημα 8.2.5 (ανισότητα Young). *Έστω $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ τότε $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r. \tag{8.2.4}$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την (8.2.4) για απλές ολοκληρώσιμες f και g. Σταθεροποιούμε την g και θεωρούμε τον τελεστή $f \mapsto T(f) = f * g$. Μια βασική ανισότητα για συνλίξεις (απλή συνέπεια της ανισότητας Minkowski) που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει, μας εξασφαλίζει ότι

$$\|T(f)\|_r = \|f * g\|_r \leqslant M_g \|f\|_1$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f, όπου $M_g = \|g\|_r$. Επίσης, από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\|T(f)\|_\infty = \|f * g\|_\infty \leqslant \|g\|_r \|f\|_{r^*} = M_g \|f\|_{r^*}$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f, όπου r^* είναι ο συζυγής εκθέτης του r. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.1.1 ως εξής: από την υπόθεση για τα p, q και r έχουμε $t = r\left(1 - \frac{1}{p}\right) \in [0, 1]$, και γι' αυτήν την τιμή του t ικανοποιούνται οι $\frac{1-t}{r} + \frac{t}{\infty} = \frac{1}{q}$ και $\frac{1-t}{1} + \frac{t}{r^*} = \frac{1}{p}$. Άρα, το Θεώρημα 8.1.1 μας δίνει

$$\|T(f)\|_q = \|f * g\|_q \leqslant M_g^{1-t} M_g^t \|f\|_p = \|g\|_r \|f\|_p$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f. □

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για τους $L^p(\mathbb{T})$: αν οι $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$, τότε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και $g \in L^q(\mathbb{T})$ έχουμε $f * g \in L^r(\mathbb{T})$ και

$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r. \tag{8.2.5}$$

Εδώ, το εύρος των (p, q, r) για τα οποία ισχύει η ανισότητα είναι αυτομάτως μεγαλύτερο, αφού $\|g\|_{r_1} \leqslant \|g\|_r$ όταν $r_1 \leqslant r$.

Το διάγραμμα Riesz της ανισότητας του Young στον $\mathbb{R}^n$ (για σταθερή τιμή του r) είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεια $\left(1 - \frac{1}{r}, 0\right)$ και $\left(1, \frac{1}{r}\right)$. Το αντίστοιχο διάγραμμα Riesz της ανισότητας του Young στο $\mathbb{T}$ (για σταθερή τιμή του r) είναι το τραπέζιο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\left(1 - \frac{1}{r}, 0\right)$ και $\left(1, \frac{1}{r}\right)$.

Κεφάλαιο 9

Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

9.1 Abel αθροισιμότητα και μη εφαπτομενική σύγκλιση

Σε αυτό το κεφάλαιο ταυτίζουμε τον $\mathbb{T}$ με το ∂D, το σύνορο του μοναδιαίου δίσκου $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ στο μιγαδικό επίπεδο. Για κάθε $0 \leqslant \alpha < \pi/2$ θεωρούμε το σύνολο $\Omega_\alpha(0)$ που έχει κορυφή το $1 = e^{i0}$ και άνοιγμα α ως την κυρτή θήκη του δίσκου (με κέντρο το 0) ακτίνας $\sin\alpha$ και του $\{1\}$, από την οποία αφαιρούμε το σημείο 1. Το σύνολο αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε τν έννοια της «μη εφαπτομενικής» σύγκλισης στο 1. Εύκολα ελέγχουμε ότι τα σημεία του $\Omega_\alpha(0)$ ικανοποιούν την συνθήκη

$$1 \leqslant \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant 2\max\left\{\frac{1}{1-\sin\alpha}, \frac{1}{\cos\alpha}\right\}. \tag{9.1.1}$$

Μπορούμε λοιπόν ισοδύναμα να θεωρήσουμε τον «κώνο»

$$\Gamma_\alpha(0) = \left\{z \in D : \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant \alpha\right\}, \qquad \alpha \geqslant 1. \tag{9.1.2}$$

Ορισμός 9.1.1. Έστω $\alpha \geqslant 1$ και έστω $f(z)$ συνάρτηση φραγμένη στο D. Λέμε ότι η f συγκλίνει (κατά Abel) μη εφαπτομενικά με τάξη α στον L καθώς το $z \to 1$ αν

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma_\alpha(0)} f(z) = L, \tag{9.1.3}$$

και γράφουμε $\lim_{z\to 1} f(z) = L(A_\alpha)$.

Στην περίπτωση $\alpha = 1$ ονομάζουμε αυτήν την σύγκλιση «ακτινική», διότι το z παίρνει τιμές στην ακτίνα που συνδέει το 0 με το 1.

Ορισμός 9.1.2. Έστω $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει (κατά Abel) μη εφαπτομενικά με τάξη $\alpha \geqslant 1$ στον s αν για την συνάρτηση $f(z) = \sum_{k-0}^{\infty} c_k z^k$ ισχύει $\lim_{z\to 1} f(z) = s(A_\alpha)$.

Πρόταση 9.1.3. *Αν η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον s τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει (κατά Abel) μη εφαπτομενικά με τάξη $\alpha \geqslant 1$ στον s, για κάθε $\alpha \geqslant 1$.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με s_n και σ_n τα μερικά αθροίσματα και τους Cesàro μέσους της $\{c_k\}$. Από την υπόθεση έχουμε $s_n = o(n)$. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\sum_{k=0}^{n} c_k z^k = (1-z)\sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n. \tag{9.1.4}$$

Συνεπώς, αν το όριο κάποιου από τα δύο μέλη της (9.1.4) υπάρχει, τότε υπάρχει και το όριο του άλλου και τα δύο όρια είναι ίσα. Επιπλέον, αφού $s_n z^n = o(1)$, έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = (1-z)\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k \tag{9.1.5}$$

αν οποιαδήποτε από τις δύο σειρές συγκλίνει. Κάνοντας άλλη μια άθροιση κατά μέρη, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $n\sigma_{n-1}z^{n-1} = o(1)$ για κάθε $z \in D$ καθώς το $n \to \infty$, βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = (1-z)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\sigma_k z^k = f(z) \tag{9.1.6}$$

αν οποιαδήποτε από τις δύο σειρές συγκλίνει. Παρατηρούμε τώρα ότι αν $|z| < 1$ τότε η σειρά στο δεξιό μέλος της (9.1.6) συγκλίνει απολύτως και ότι το άθροισμά της φράσσεται από $c/(1-|z|)^2$, συνεπώς το άθροισμα στο αριστερό μέλος της (9.1.6) είναι κι αυτό πεπερασμένο. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η $f(z)$ συγκλίνει στο s μη εφαπτομενικά. Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$1 = (1-z)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k, \qquad |z| < 1. \tag{9.1.7}$$

Ακριβέστερα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(z) - s| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $z \in \Gamma_\alpha(0)$ με $|1-z| \leqslant \delta$. Πράγματι, συνδυάζοντας τις (9.1.6) και (9.1.7) βλέπουμε ότι

$$f(z) - s = (1-z)^2 \sum_{k=0}^{N} (k+1)(\sigma_k - s) z^k + (1-z)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - s) z^k =: I + J.$$

Αφού

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1) r^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) r^k = \frac{1}{(1-r)^2},$$

επιλέγοντας N έτσι ώστε $|\sigma_k - s| \leqslant \varepsilon/2\alpha^2$ για κάθε $k \geqslant N+1$ συμπεραίνουμε ότι αν $z \in \Gamma_\alpha(0)$ τότε

$$|J| \leqslant \left(\frac{2\alpha^2}{|1-z|^2 \varepsilon}\right) \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)|z| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έχοντας σταθεροποιήσει το N, παρατηρούμε ότι

$$|I| \leqslant c|1-z|^2 \sum_{k=0}^{N}(k+1) \leqslant c_N\delta^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

αρκεί να πάρουμε το δ αρκετά μικρό. □

Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε την Πρόταση 9.1.3 στις σειρές Fourier. Δεδομένου ότι η άθροιση στον Ορισμό 9.1.2 είναι πάνω από τους $k \geqslant 0$, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ ορίζουμε

$$C_0(x) = c_0, \qquad C_k(x) = c_{-k}e^{-ikx} + c_k e^{ikx} \qquad \text{αν } k \geqslant 1 \tag{9.1.8}$$

και

$$\tilde{C}_0(x) = c_0, \qquad \tilde{C}_k(x) = (-i)(-c_{-k}e^{-ikx} + c_k e^{ikx}) \qquad \text{αν } k \geqslant 1. \tag{9.1.9}$$

Από την Πρόταση 9.1.3 έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x) = f(x)\,(A_\alpha) \ \text{ σχεδόν παντού στο } \mathbb{T} \tag{9.1.10}$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k(x) = Hf(x)\,(A_\alpha) \ \text{ σχεδόν παντού στο } \mathbb{T}. \tag{9.1.11}$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι οι (9.1.10) και (9.1.11) σχύουν ταυτόχρονα σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Πιο συγκεκριμένα, αν $z = re^{ix} \in \Gamma_\alpha(0)$ τότε, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$,

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma_\alpha(0)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x) r^k e^{ikx} = f(x) \tag{9.1.12}$$

και

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma_\alpha(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k(x) r^k e^{ikx} = Hf(x). \tag{9.1.13}$$

Παρατηρούμε ότι το $\Gamma_\alpha(0)$ είναι συμμετρικό, δηλαδή $z \in \Gamma_\alpha(0)$ αν και μόνο αν $\overline{z} \in \Gamma_\alpha(0)$, και ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x) r^k e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{i|k|t} e^{ikx}. \tag{9.1.14}$$

Συνεπώς, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$ έχουμε

$$\lim_{re^{\pm it}\to 1, re^{\pm it}\in\Gamma_\alpha(0)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{\pm i|k|t} e^{ikx} = f(x). \tag{9.1.15}$$

Όμοια, από την (9.1.13) αυτή τη φορά, για τα ίδια x έχουμε

$$\lim_{re^{\pm it}\to 1, re^{\pm it}\in\Gamma_\alpha(0)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign} k) c_k r^{|k|} e^{\pm i|k|t} e^{ikx} = iHf(x). \tag{9.1.16}$$

Από τις (9.1.15) και (9.1.16) βλέπουμε ότι

$$\lim_{re^{it}\to 1, re^{it}\in\Gamma_\alpha(0)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ikt} e^{ikx} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign} k) c_k r^{|k|} e^{-ikt} e^{ikx} \right) = f(x) - iHf(x) \tag{9.1.17}$$

και

$$\lim_{re^{it}\to 1, re^{it}\in\Gamma_\alpha(0)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ikt} e^{ikx} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign} k) c_k r^{|k|} e^{-ikt} e^{ikx} \right) = f(x) + iHf(x) \tag{9.1.18}$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Έχουμε λοιπόν το εξής:

Θεώρημα 9.1.4. *Εστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$,*

$$\lim_{re^{it}\to 1, re^{it}\in\Gamma_\alpha(0)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ikt} e^{ikx} = f(x) \tag{9.1.19}$$

και

$$\lim_{re^{it}\to 1, re^{it}\in\Gamma_\alpha(0)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-i)(\operatorname{sign} k) c_k r^{|k|} e^{ikt} e^{ikx} = Hf(x). \tag{9.1.20}$$

Απόδειξη. Η (9.1.19) προκύπτει αν προσθέσουμε τις (9.1.17) και (9.1.19), ενώ η (9.1.20) προκύπτει αν αφαιρέσουμε την (9.1.17) από την (9.1.18) και χρησιμοποιήσουμε την συμμετρία του $\Gamma_\alpha(0)$ για να θέσουμε t όπου $-t$. $\square$

9.2 Ο πυρήνας του Poisson και ο συζυγής πυρήνας του Poisson

Οι ποσότητες που εμφανίζονται στο αριστερό μέλος των (9.1.19) και (9.1.20) αντιστοιχούν στη συνέλιξη της f με τις συναρτήσεις $P(z)$ και $Q(z)$ που έχουν σειρές Fourier τις

$$P(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx}, \qquad z = re^{ix},\ 0 < r < 1 \tag{9.2.1}$$

και

$$\tilde{P}(z) = Q(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-i)(\operatorname{sign} k) r^{|k|} e^{ikx}, \qquad z = re^{ix},\ 0 < r < 1 \tag{9.2.2}$$

αντίστοιχα. Η P είναι ο *πυρήνας του Poisson* και η Q είναι ο *συζυγής πυρήνας του Poisson*. Συχνά θεωρούμε τις $P_r(x) = P(re^{ix})$ και $Q_r(x) = Q(re^{ix})$ σαν μια οικογένεια πυρήνων με δείκτη το $r \in (0,1)$. Πρώτος μας στόχος είναι να γράψουμε τις P_r και Q_r σε κλειστή μορφή. Αθροίζοντας την γεωμετρική σειρά στην (9.2.1) βλέπουμε ότι

$$P_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikx} = \frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}}, \tag{9.2.3}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos x)}. \tag{9.2.4}$$

Τελείως ανάλογα, αθροίζοντας την γεωμετρική σειρά στην (9.2.2) βλέπουμε ότι

$$Q_r(x) = (-i)\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikx} - (-i)\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikx} = (-i)\left(\frac{re^{ix}}{1-re^{ix}} - \frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right), \tag{9.2.5}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$Q_r(x) = \frac{2r\sin x}{1-2r\cos x + r^2} = \frac{2r\sin x}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos x)}. \tag{9.2.6}$$

Παρατηρήστε ότι αν $z = re^{ix}$ τότε από τις (9.2.3) και (9.2.5) έχουμε

$$P(z) + iQ(z) = \frac{1}{1-reix} + \frac{re^{ix}}{1-re^{ix}} = \frac{1+z}{1-z}, \tag{9.2.7}$$

δηλαδή η $P + iQ$ είναι αναλυτική συνάρτηση στον D.

Από την (9.2.4) φαίνεται ότι η $P_r(x)$ είναι περιοδική, θετική και άρτια συνάρτηση, είναι φθίνουσα στο $[0,\pi)$, και ικανοποιεί την

$$P_r(x) \leqslant \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r} \leqslant \frac{2}{1-r}. \tag{9.2.8}$$

Μπορούμε επίσης να δώσουμε το φράγμα

$$P_r(x) \leqslant \frac{1-r^2}{2r(1-\cos x)} \leqslant \frac{1-r}{2r(\sin(x/2))^2} \leqslant \frac{\pi(1-r)}{2rx^2}. \tag{9.2.9}$$

Τέλος, από την (9.2.1) παίρνουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(x)\,dx = 1. \tag{9.2.10}$$

Έπεται το εξής:

Πρόταση 9.2.1. *Η οικογένεια $\{P_r\}_{0<r<1}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας - άρα, και οικογένεια καλών πυρήνων - καθώς το $r \to 1^-$.*

Ο συζυγής πυρήνας του Poisson έχει αντίστοιχες ιδιότητες. Από την (9.2.6) έχουμε ότι η $Q_r(x)$ είναι περιττή συνάρτηση και ικανοποιεί τις

$$|Q_r(x)| \leqslant \frac{cr|x|}{(1-r)^2} \quad \text{και} \quad |Q_r(x)| \leqslant \frac{c}{|x|}. \tag{9.2.11}$$

Επίσης, από την (9.2.5),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} Q_r(x)\,dx = 0. \tag{9.2.12}$$

Τέλος, μπορεί κανείς να ελέγξει ότι η $\|Q_r\|_1$ δεν είναι φραγμένη καθώς το $r \to 1^-$.

Ορισμός 9.2.2. Έστω $\alpha \geqslant 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{T}$ θέτουμε $\Gamma_\alpha(x) = \{z \in D : e^{-ix}z \in \Gamma_\alpha(0)\}$. Δηλαδή, το $\Gamma_\alpha(x)$ προκύπτει από στροφή του $\Gamma_\alpha(0)$ τέτοια ώστε η κορυφή του να βρεθεί στο e^{ix}. Παρόμοιο ορισμό μπορούμε να δώσουμε για το $\Omega_\alpha(x)$.

Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $\alpha \geqslant 1$ ορίζουμε την *μη εφαπτομενική μεγιστική συνάρτηση* της $f * P_r$ τάξης α ως εξής:

$$N_\alpha(f * P_r, x) = \sup_{z=re^{it}\in\Gamma_\alpha(x)} |(f * P_r)(t)|. \tag{9.2.13}$$

Η N_1 ονομάζεται *ακτινική μεγιστική συνάρτηση.*

Θεώρημα 9.2.3. *Για κάθε $\alpha > 1$ υπάρχει μια σταθερά $c_\alpha > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$,*

$$N_\alpha(f * P_r, x) \leqslant c_\alpha Mf(x). \tag{9.2.14}$$

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι κάθε $z = re^{ix} \in \Gamma_\alpha(x)$ είναι της μορφής $re^{i(x+s)}$ όπου $re^{is} \in \Gamma_{|alpha}(0)$, βλέπουμε ότι

$$(f * P_r)(x) = I = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)P_r(x+s-u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x+u)P_r(s-u)\,du, \tag{9.2.15}$$

άρα

$$|I| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} |f(x+u)|P_r(s-u)\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} |f(x+u)|P_r(s-u)\,du. \tag{9.2.16}$$

Θα δουλέψουμε μόνο με το

$$K := \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} |f(x+u)|P_r(s-u)\,du. \tag{9.2.17}$$

Για το άλλο ολοκλήρωμα εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. Ορίζουμε

$$F_x(u) = F(u) = \int_0^u |f(x+v)|\,dv. \tag{9.2.18}$$

Η F είναι απολύτως συνεχής και $F'(u) = |f(x+u)|$ σχεδόν παντού. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$K = K_1 + K_2 = F(u)P_r(s-u)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(u)P_r'(s-u)\,du. \tag{9.2.19}$$

Για τον όρο K_1, χρησιμοποιώντας τις $F(0) = 0$, $F(\pi) \leqslant cMf(x)$ και $P_r(s-\pi) \leqslant c_\alpha$, βλέπουμε ότι

$$K_1 \leqslant c_\alpha Mf(x).$$

Επιπλέον, αφού για κάθε $0 < u < \pi$ ισχύει

$$\frac{F(u)}{\sin\frac{u}{2}} \leqslant cMf(x),$$

έχουμε

$$K_2 \leqslant c\left(\int_0^\pi \sin(u/2)P_r'(s-u)\,du\right) Mf(x). \tag{9.2.20}$$

Για να φράξουμε το ολοκλήρωμα στην (9.2.20) διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $0 < r \leqslant 1/2$, γράφουμε

$$\left|\int_0^\pi \sin(u/2)P_r'(s-u)\,du\right| \leqslant \int_{\mathbb{T}} |P_r'(u)|\,du 2\int_{-\pi}^0 P_r'(u)\,du \leqslant 2P_r(0) \leqslant \frac{4}{1-r} \leqslant 8.$$

Αν $1/2 < r < 1$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \sin(u/2)P_r'(s-u)\,du\right| &\leqslant \int_{\mathbb{T}} \left|\sin\frac{s-u}{2}\right|\,|P_r'(u)|\,du\\ &\leqslant c|s|\int_{\mathbb{T}} |P_r'(u)|\,du + c\int_{\mathbb{T}} |u|\,|P_r'(u)|\,du =: K_3 + K_4.\end{aligned}$$

Για να φράξουμε το K_4 παρατηρούμε ότι η $uP_r'(u)$ είναι άρτια, άρα

$$\begin{aligned}K_4 &= -2\int_0^\pi uP_r'(u)\,du = -2uP_r(u)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi P_r(u)\,du\\ &= -2\pi P_r(\pi) + 2\pi \leqslant 2\pi.\end{aligned} \tag{9.2.21}$$

Τέλος, για να φράηουμε το K_3, παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2}|s| \leqslant r|s| \leqslant c|r - re^{is}| \leqslant c|r-1| + c|1-re^{is}|,$$

άρα

$$K_3 \leqslant c(1-r)\frac{1}{1-r} + c\frac{|1-re^{is}|}{1-r} \leqslant c + c_\alpha. \tag{9.2.22}$$

Συνδυάζοντας τις (9.2.21) και (9.2.22) παίρνουμε $K_2 \leqslant c_\alpha Mf(x)$, και έπεται το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 9.2.4. *Έστω $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και $\alpha \geqslant 1$. Υπάρχει σταθερά $c_{\alpha,p} > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,*

$$\|N_\alpha(f * P_r)\|_p \leqslant c_{\alpha,p}\|f\|_p \tag{9.2.23}$$

αν $1 < p \leqslant \infty$, και

$$\lambda\, m(\{x : N_\alpha(f * P_r)(x) > \lambda\}) \leqslant c_{1,p}\|f\|_1 \tag{9.2.24}$$

για κάθε $\lambda > 0$, αν $p = 1$.

Πόρισμα 9.2.5. *Έστω $1 < p \leqslant \infty$ και $\alpha \geqslant 1$. Υπάρχει σταθερά $c_{\alpha,p} > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$,*

$$N_\alpha(f * Q_r, x) \leqslant c_{\alpha,p} M(\tilde{f})(x), \tag{9.2.25}$$

άρα, αν $1 < p < \infty$,

$$\|N_\alpha(f * Q_r)\|_p \leqslant c_{\alpha,p}\|f\|_p. \tag{9.2.26}$$

Απόδειξη. Αφού $(\sigma_n(f) * Q_r)(x) = (\tilde{\sigma}_n(f) * P_r)(x)$ και $p > 1$, έπεται ότι $(f * Q_r)(x) = (\tilde{f} * P_r)(x)$. Τότε, το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 9.2.3 και το Πόρισμα 9.2.4. □

Σχετικά με την L^p-σύγκλιση έχουμε το εξής.

Θεώρημα 9.2.6. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ έχουμε*

(α) $\|f * P_r\|_p \leqslant \|f\|_p$ *για κάθε* $r < 1$.

(β) $\lim_{r \to 1^-} \|f * P_r - f\|_p = 0$.

(γ) $\lim_{z = re^{ix} \to 1, z \in \Gamma_\alpha(0)} \|f * P_r(x + \cdot) - f\|_p = 0$.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για $p = \infty$, αν υποθέσουμε ότι $f \in C(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Για το (α) παρατηρούμε ότι $\|f * P_r\|_p \leqslant \|f\|_p \|P_r\|_1 = \|f\|_p$. Η απόδειξη του (β) είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 5.2.9. Για το (γ), στην περίπτωση $p < \infty$ παρατηρούμε ότι

$$|(f * P_r)(x + t) - f(t)| \leqslant cMf(x)$$

από το Θεώρημα 9.2.3, και

$$\lim_{z = re^{ix} \to 1, z \in \Gamma_\alpha(0)} (f * P_r)(x + t) = f(t)$$

σχέδόν παντού, από το Θεώρημα 9.1.4. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το λήμμα του Fatou. Η περίπτωση $p = \infty$ ελέγχεται επίσης εύκολα. □

Για τον συζυγή πυρήνα Poisson έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 9.2.7. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, για κάθε $\alpha \geqslant 1$,*

$$\lim_{z=re^{ix}\to 1, z\in\Gamma_\alpha(0)} [(f*Q_r)(x+t) - H_{1-r}f(t)] = 0 \quad \textit{σχεδόν παντού,} \tag{9.2.27}$$

και υπάρχει σταθερά $c_\alpha > 0$, που εξαρτάται μόνο από το α, ώστε

$$\sup_{z=re^{ix}\in\Gamma_\alpha(0)} |(f*Q_r)(x+t) - H_{1-r}f(t)| \leqslant c_\alpha Mf(x) \quad \textit{σχεδόν παντού.} \tag{9.2.28}$$

Συνεπώς, αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, έχουμε επίσης

$$\lim_{z=re^{ix}\to 1, z\in\Gamma_\alpha(0)} \|(f*Q_r)(x+\cdot) - H_{1-r}f\|_p = 0. \tag{9.2.29}$$

Απόδειξη. Οι (9.2.27) και (9.2.28) ελέγχονται με επιχειρήματα ανάλογα με αυτά που χρησιμοποιήσαμε για τον συζυγή πυρήνα του Fejér, τα οποία τώρα συνδυάζουμε με το Θεώρημα 9.2.3 για να χρησιμοποιήσουμε την μη εφαπτομενική σύγκλιση. Περιγράφουμε την απόδειξη για την ακτινική περίπτωση. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από την

$$Q_1(x) = \frac{2\sin x}{2(1-\cos x)} = \frac{1}{\tan(x/2)}, \qquad x \neq 0$$

έχουμε

$$\begin{aligned}(f*Q_r)(t) - H_{1-r}f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\leqslant 1-r} f(t-x)Q_r(x)\,dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{1-r<|x|<\pi} f(t-x)(Q_r(x)-Q_1(x))\,dx = I_1(t) + I_2(t).\end{aligned} \tag{9.2.30}$$

Χρησιμοποιώντας την (9.2.11) παίρνουμε

$$|I_1(t)| \leqslant \frac{c}{1-r}\int_{|x|\leqslant 1-r} |f(t-x)|\,dx,$$

άρα $|I_1(t)| \leqslant cMf(t)$ και $|I_1(t)| = o(1)$ καθώς το $r \to 1^-$ σε κάθε $f \in \mathrm{Leb}(f)$. Επιπλέον, αφού η

$$Q_r(x) - Q_1(x) = \frac{1-r}{1+r}Q_1(x)P_r(x)$$

είναι περιττή και φθίνουσα στο $(0,\pi)$, και αφού από την (9.2.11)

$$\frac{1-r}{1+r}Q_1(x) \leqslant \frac{1-r}{1+r}\,\frac{1}{\sin(x/2)} < \pi, \qquad 0 < x < \pi,$$

βλέπουμε ότι

$$|I_2(t)| \leqslant c\int_{\mathbb{T}} |f(t-x)|P_r(x)\,dx \leqslant cMf(t).$$

Τέλος, ένα επιχείρημα ανάλογο με αυτό στήν απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.7 βλέπουμε ότι $|I_2(t)| = o(1)$ καθώς το $r \to 1^-$. $\square$