Αρμονική Ανάλυση (2022–23)
27 Σεπτεμβρίου 2023

1. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $t \in \mathbb{T}$ ορίζουμε $f_t : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $f_t(s) = f(t-s)$, $s \in \mathbb{T}$. Αποδείξτε ότι

$$\|f_t - f\|_1 \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

(β) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $\sigma_n(f)(t) = (f * K_n)(t)$, $t \in \mathbb{T}$, όπου K_n ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Αποδείξτε ότι

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |\sigma_n(f)(t) - f(t)| = \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

2. (1+1 μον.) (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο (a,b), με φραγμένη παράγωγο. Αποδείξτε ότι η f είναι απολύτως συνεχής.

(β) Έστω $E \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο σύνολο για το οποίο υπάρχει $a > 0$ ώστε $\lambda_1(I \cap E) \geqslant a\lambda_1(I)$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Αποδείξτε ότι $\lambda_1(E) = 1$.

3. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $f_n(t) := f(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{T}$, όπου θεωρούμε την f ως 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ για να έχει νόημα το $f(nt)$ για $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{T}$. Αποδείξτε ότι $\widehat{f_n}(k) = \widehat{f}\left(\frac{k}{n}\right)$ αν $n \mid k$ και $\widehat{f_n}(k) = 0$ αν $n \nmid k$ (όπου $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$).

[*Υπόδειξη:* $\int_0^{2\pi n} f = \sum_{j=1}^n \int_{2\pi(j-1)}^{2\pi j} f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική.]

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t)g(nt)\,dt = 2\pi\widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

[*Υπόδειξη:* Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$.]

4. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}|\widehat{f}(k)|.$$

(β) Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$ σειρά της μορφής $f(t) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin(nt)$, $t \in \mathbb{T}$, με την ισότητα να ισχύει στον $L^2(\mathbb{T})$, δηλαδή τα μερικά αθροίσματα της σειράς συγκλίνουν στην f στον $L^2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t)f(t)\,dt.$$

5. (1.5+1.5 μον.) (α) Το θεώρημα του Riesz ταυτοποιεί τον δυϊκό του χώρου Banach $C(\mathbb{T})$ με τον χώρο $M(\mathbb{T})$ των μιγαδικών μέτρων Borel στον $\mathbb{T}$. Συνεπώς, μια ακολουθία μέτρων Borel $\mu_n \in M(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε μέτρο Borel $\mu \in M(\mathbb{T})$ ως προς την ασθενή* τοπολογία αν και μόνο αν $\int_{\mathbb{T}} f\,d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f\,d\mu$ για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\mu_n \to \mu$ ασθενώς* αν και μόνο αν $\widehat{\mu_n}(k) \to \widehat{\mu}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και $\sup_n \|\mu_n\| < +\infty$, όπου για $\nu \in M(\mathbb{T})$

$$\|\nu\| = \inf\left\{C > 0 : \left|\int_{\mathbb{T}} f\,d\nu\right| \leqslant C\|f\|_\infty \ \text{ για κάθε } \ f \in C(\mathbb{T})\right\}$$

και $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{T}\}$ για $f \in C(\mathbb{T})$.

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\sum_{n=-\infty}^\infty |\widehat{f}(n)|\,|n|^k < +\infty$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue σχεδόν παντού ίση με μια συνάρτηση g που είναι k φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Συμπεράνατε ότι αν $|\widehat{f}(n)| \leqslant C|n|^\ell$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, για κάποιον $\ell > 2$ και κάποια σταθερά $C > 0$ τότε η f είναι ίση λ-σ.π. με μια $g \in C^k(\mathbb{T})$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ με $k = \ell - 2$ αν $\ell \in \mathbb{N}$ και $k = \lfloor \ell \rfloor - 1$ αν $\ell \in (2, +\infty) \setminus \mathbb{N}$.

Καλή Επιτυχία!