Αρμονική Ανάλυση (2022–23)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

1. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X)<+\infty$ και $1\leqslant p<q<+\infty$. Δείξτε ότι $L^p(X,\mathcal{A},\mu)\supseteq L^q(X,\mathcal{A},\mu)$ και ότι

$$\|f\|_p\leqslant[\mu(X)]^{1/p-1/q}\|f\|_q$$

για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f επί του X.

2. (α) Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου. Δείξτε ότι, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f επί του X,

$$\|f\|_\infty=\min\{t\geqslant 0:\mu(\{x\in X:|f(x)|>t\})=0\}.$$

(β) Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση επί του X και έστω $\varphi(p):=\|f\|_p^p$ για $p>0$. Έστω επίσης $E:=\{p\in(0,\infty):\varphi(p)<+\infty\}$ και έστω ότι $\|f\|_\infty>0$.

(i) Αν $r<p<q$ και $r,q\in E$, δείξτε ότι $p\in E$.

(ii) Δείξτε ότι η $\ln\varphi$ είναι κυρτή συνάρτηση στο εσωτερικό του E και συνεχής στο E.

(iii) Από το ερώτημα (i) το E είναι διάστημα. Είναι πάντα ανοικτό; Κλειστό; Μπορεί το E να είναι μονοσύνολο;

(γ) Αν $r<p<q$ και f μετρήσιμη συνάρτηση επί του X, δείξτε ότι $\|f\|_p\leqslant\max\big\{\|f\|_q,\|f\|_r\big\}$. Συμπεράνατε ότι $L^q(X,\mathcal{A},\mu)\cap L^r(X,\mathcal{A},\mu)\subseteq L^p(X,\mathcal{A},\mu)$.

(δ) Δείξτε ότι, αν $f\in L^p(X,\mathcal{A},\mu)\cap L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ για κάποιο $p<\infty$, τότε $f\in L^q(X,\mathcal{A},\mu)$ για κάθε $q>p$ και

$$\lim_{q\to\infty}\|f\|_q=\|f\|_\infty.$$

3. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πιθανότητας (δηλαδή, $\mu(X)=1$). Δείξτε ότι αν $f\in L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ για κάποιο $p>0$, τότε

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p=\exp\left(\int_X\ln|f|\,d\mu\right).$$

4. Για f μετρήσιμη συνάρτηση επί του $\mathbb{R}^n$ και $y\in\mathbb{R}^n$, έστω f_y η συνάρτηση $f_y(x):=f(x-y)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι, αν $1\leqslant p<+\infty$ και $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, τότε $\lim\limits_{y\to 0}\|f_y-f\|_p=0$.

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε πρώτα $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$.]

5. (Γενικευμένη ανισότητα Hölder). Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $p_1\geqslant 1,\dots,p_m\geqslant 1$ τέτοιοι ώστε $\sum\limits_{j=1}^m 1/p_j=1$. Αν $f_j\in L^{p_j}(X,\mathcal{A},\mu)$ για κάθε $j\in\{1,\dots,m\}$, δείξτε ότι

$$\left\|\prod_{j=1}^m f_j\right\|_1\leqslant\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{p_j}.$$

6. (Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα). Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου, $1\leqslant p\leqslant\infty$ και $f:X\times Y\to[0,+\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση ως προς την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Δείξτε ότι αν $f_y(x):=f(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$, τότε

$$\left\|\int_Y f_y d\nu(y)\right\|_{L^p(X)}\leqslant\int_Y\|f_y\|_{L^p(X)}\,d\nu(y),$$

υπό την έννοια ότι

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int_Y \left(\int_X f(x,y)^p d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y).$$

7. (Ανισότητα Hardy). Έστω $1 < p < +\infty$, $f \in L^p(0,+\infty)$ και

$$F(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Δείξτε την ανισότητα του Hardy:

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι ο μετασχηματισμός $f \mapsto F$ απεικονίζει τον $L^p(0,+\infty)$ στον $L^p(0,+\infty)$.

(β) Δείξτε ότι ισότητα στην παραπάνω ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν η f είναι η μηδενική συνάρτηση στον $L^p(0,+\infty)$ (δηλαδή $f = 0$ σχεδόν παντού).

(γ) Δείξτε ότι η σταθερά $p/(p-1)$ είναι βέλτιστη, δηλαδή δεν μπορεί να αντικατασταθεί με μικρότερη.

(δ) Δείξτε ότι αν $f > 0$ και $f \notin L^1(0,+\infty)$ τότε $F \notin L^1(0,+\infty)$.

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε πρώτα την περίπτωση $f \geqslant 0$. Ολοκλήρωση κατά μέρη δίνει

$$\int_a^b F(x)^p dx = bF(b)^p - aF(a)^p - p\int_a^b F(x)^{p-1} xF'(x)\,dx$$

για κάθε $0 < a < b < +\infty$. Συμπεράνατε από αυτό ότι

$$\int_0^b F(x)^p dx = bF(b)^p - p\int_0^b F(x)^{p-1} xF'(x)\,dx \geqslant -p\int_0^b F(x)^{p-1} xF'(x)\,dx$$

για κάθε $b \in (0,+\infty)$, όταν $f \in L^p(0,+\infty)$. Παρατηρήστε ότι $xF'(x) = f(x) - F(x)$ και χρησιμοποιήστε την ανισότητα Hölder. Εναλλακτικά, για το (α), παρατηρήστε ότι $F(x) = \int_0^1 f(xy)\,dy$ και χρησιμοποιήστε την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα. Για το (γ) θεωρήστε την $f(x) = x^{-1/p}\mathbb{1}_{[1,A]}(x)$.]

8. Για μετρήσιμες συναρτήσεις f, g στον $\mathbb{R}^n$, η συνέλιξη $f * g$ ορίζεται ως

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

(α) Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, με $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, και $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, δείξτε ότι η συνάρτηση $y \mapsto f(x-y)g(y)$ είναι μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη ως προς y, για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και άρα η $f * g$ είναι καλά ορισμένη. Δείξτε επίσης ότι $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και

$$\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1.$$

(β) Έστω $p, q > 1$ με $p^{-1} + q^{-1} = 1$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Δείξτε ότι τότε $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ και

$$\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Επιπλέον, η $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\lim_{|x|\to\infty}(f*g)(x) = 0$. (Με $|x|$ συμβολίζουμε την ευκλείδεια νόρμα του x στον $\mathbb{R}^n$.)

9. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μη μηδενική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|^n} \quad \text{για } |x| \geqslant 1$$

και επομένως η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|(\ln|x|)^2} & \text{αν } |x| \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|\ln|x|} \quad \text{για } |x| \leqslant \frac{1}{2}$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

11. Μια οικογένεια συναρτήσεων $\{K_\delta : \delta > 0\}$ στον $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται προσέγγιση της μονάδας αν:

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(x)\,dx = 1$ για κάθε $\delta > 0$,

(ii) υπάρχει σταθερά $c < +\infty$ ώστε $|K_\delta(x)| \leqslant c/\delta^n$ για κάθε $\delta > 0$ και $y \in \mathbb{R}^n$,

(iii) υπάρχει σταθερά $c < +\infty$ ώστε $|K_\delta(x)| \leqslant c\delta\,|y|^{-(n+1)}$ για κάθε $\delta > 0$ και $y \in \mathbb{R}^n$.

Αν $\{K_\delta : \delta > 0\}$ είναι μία προσέγγιση της μονάδας, δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C < +\infty$ τέτοια ώστε

$$\sup_{\delta > 0} |(K_\delta * f)(x)| \leqslant C f^*(x)$$

για κάθε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.

12. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ που έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $\lambda_1(I \cap E) \geqslant \alpha\lambda_1(I)$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $\lambda_1(E) = 1$.

13. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με (γνήσια) θετικό μέτρο. Υπάρχει πάντα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lambda_1\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A + x_n)\right) = 0;$$