$*$ Σημείωση: $\sup_n \|S_n\|^{C(\mathbb{T})} =$

$$= \sup_n \left\{ \sup_{f\neq 0} \frac{\|S_n(f)\|_{C(\mathbb{T})}}{\|f\|_{C(\mathbb{T})}} \right\} =$$

$$= \sup_n \left\{ \sup_{f\neq 0} \frac{\sup_{t\in\mathbb{T}} |S_n(f,t)|}{\sup_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|} \right\}$$

Απόδειξη θεωρήματος:

"$\Rightarrow$" Έστω $1\leq p<+\infty$ και έστω ότι $\|S_n(f)-f\|_p \longrightarrow 0$, όσο $n\to\infty$ $\forall f\in L^p(\mathbb{T})$. Έπεται ότι $\|S_n(f)\|_p \xrightarrow{n\to\infty} \|f\|_p$, $\forall f\in L^p(\mathbb{T})$, δηλαδή $\forall f\in L^p$ η $S_n(f)$ είναι $\|\ \|_p$ - φραγμένη $\Rightarrow$ $\exists\, C_f>0$ τ.ω. $\|S_n(f)\|_p \leq C_f$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall f\in L^p(\mathbb{T})$. Συνεπώς, από την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος, έχουμε ότι

$\|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$ για

κάποιο $0 < C < +\infty$.

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $\sup_n \|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$,

$1 \leq p < +\infty$. Θα δ.ο. $\|S_n(f) - f\|_p \longrightarrow 0$

όσο $n \to \infty$ $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$.

Παρατηρούμε ότι αν $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} a_k$

είναι τριγωνομετρικό πολ/μο, τότε

$S_m(p) = p$ $\forall m \geq n$. Επίσης, για $f \in L^p(\mathbb{T})$

και για $m \in \mathbb{N}$ είναι

$\|S_m(f) - f\|_p \leq \|S_m(f) - S_m(p)\|_p +$

$\|S_m(p) - f\|_p \leq$

$\leq \|S_m(f) - S_m(p)\|_p + \|S_m(p) - p\|_p +$

$\|p - f\|_p \leq (\|S_m\|^{L^p} + 1)\|f - p\|_p + \|S_m(p) - p\|_p$

$\leq (\sup_n \|S_n\|^{L^p} + 1) \cdot \|f - p\|_p + \|S_m(p) - p\|_p$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Για $f \in L^p(\mathbb{T})$

επιμεταλλευθήκαμε την πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολ/μων στον $L^p(\mathbb{T})$ και βρίσκουμε p_ε τ.ω. $\|f - p_\varepsilon\|_p < \varepsilon$.

Τότε, η παρατήρηση, για $m \geq \deg p_\varepsilon$, μας δίνει ότι $\|S_m(f) - f\|_p \leq$

$\leq \left(\sup_n \|S_n\|^{L^p} + 1 \right) \cdot \varepsilon + 0$. Δηλαδή, $\|S_m(f) - f\|_p \longrightarrow 0$, όσο $m \to \infty$.

Η απόδειξη για τον $C(\mathbb{T})$ είναι ολόιδια. □

17-5-23

<u>Πρόταση</u>: Ο $L^1(\mathbb{T})$ δεν επιδέχεται σύγκλιση ως προς τη νόρμα.

Απόδειξη: Ξεκινάμε διατυπώνοντας έναν ισχυρισμό: $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1 \sim c \cdot \log n$

Πράγματι, είναι $\|S_n(f)\|_1 = \|D_n * f\|_1 \leq$

$\leq \|D_n\|_1 \cdot \|f\|_1$, $\forall f \in L^1(\mathbb{T}) \Longrightarrow$

$\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} \leq \|D_n\|_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Επίσης, για τον N-οστό πυρήνα του Fejer, $F_N \in L^1(\mathbb{T})$, $\|F_N\|_1 = 1$ είναι $S_n(F_N) = D_n * F_N = \sigma_N(D_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} D_n$, όσο $N \to \infty$. Άρα, $\|S_n(F_N)\|_1 = \|\sigma_N(D_n)\|_1 \xrightarrow{N\to\infty} \|D_n\|_1$. Συνεπώς, $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} \geq \|S_n(F_N)\|_1$ $\forall$ N και κρατώντας το $N \to \infty$ έχουμε ότι $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} \geq \|D_n\|_1$. Τελικά, $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Και καθώς γνωρίζουμε ότι $\|D_n\|_1 \sim c \log n$ έχουμε τελειώσει. □

Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $\|S_n(f) - f\|_1 \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Μια τέτοια είναι η $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} \cdot F_{n_j}(x)$, όπου $n_1 < n_2 < \dots$ μεγαλώνουν αρκετά γρήγορα.

<u>Πρόταση</u>: Ο $C(\mathbb{T})$ δεν επιδέχεται σύγκλιση ως προς τη νόρμα.

Απόδειξη: Και εδώ, αρκεί ν.δ.ο.

$$\|S_n\|^{C(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1 \sim c \log n .$$

Για $n \in \mathbb{N}$ είναι $\|S_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} = \|D_n * f\|_{C(\mathbb{T})}$

$$= \sup_{x \in \mathbb{T}} |(D_n * f)(x)| = \sup_{x \in \mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(y) D_n(x-y)\, dy \right|$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{T}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(y)| \cdot |D_n(x-y)|\, dy \leq$$

$$\leq \|f\|_{C(\mathbb{T})} \cdot \sup_{x \in \mathbb{T}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |D_n(x-y)|\, dy =$$

$$= \|f\|_{C(\mathbb{T})} \cdot \|D_n\|_1 \Rightarrow \|S_n\|^{C(\mathbb{T})} \leq \|D_n\|_1 .$$

Για την αντίστροφη... $\square$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Κάθε άλλος $L^p(\mathbb{T})$, $1<p<\infty$, επιδέχεται σύγκλιση ως προς τη νόρμα. Δηλαδή $\forall\, p\in(1,\infty)$, $\forall\, f\in L^p(\mathbb{T})$, είναι $\|S_n(f)-f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Για $p=2$ το έχουμε αποδείξει.

2) Για $f\in A(\mathbb{T})$, $S_n(f)\xrightarrow{n\to\infty} f$ ομοιόμορφα (δηλ. ως προς την $\|\cdot\|_{C(\mathbb{T})}$), άρα και ως προς την $\|\cdot\|_1$ (όχι απόδειξη).

" Μέχρι στιγμής, είχαμε σε κάποιον $L^p(\mathbb{T})$ (fixed), είχαμε την ακολουθία τελεστών (S_n), $S_n: L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})$ και εξετάζαμε την σύγκλιση της $(S_n(f))_n$ στον $L^p(\mathbb{T})$.

Εξετάζουμε τώρα την σύγκλιση των $S_n(f,x)$, $f \in L^p(\mathbb{T})$, $x \in \mathbb{T}$. //

<u>Πρόταση</u>: Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε

$$S_n(f,0) \not\xrightarrow{n\to\infty} f(0).$$

↑ όχι απόδειξη

24-5-23

<u>Θεώρημα</u> (Hardy): Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = O(1/k)$ όσο $|k| \to \infty$, τότε οι ακολουθίες $\sigma_n(f,x)$ και $S_n(f,x)$ συγκλίνουν για τα ίδια $x \in \mathbb{T}$ και στο ίδιο όριο.

Επιπλέον, αν η $\sigma_n(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο $A \subseteq \mathbb{T}$, τότε και η $S_n(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

Πριν την απόδειξη ας δούμε κάποιες παρατηρήσεις:

• Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ απολύτως συνεχής, τότε $\hat{f}(k) = O(1/|k|)$. [Πράγματι, αφού η f είναι απολύτως συνεχής, η f' υπάρχει σ.π. και $f' \in L^1(\mathbb{T})$. Επιπλέον, $(\widehat{f'})(k) = ik\,\hat{f}(k) \Rightarrow |k\hat{f}(k)| = |\hat{f'}(k)| \leq$ $\leq \|f'\|_1 \Rightarrow \hat{f}(k) = O(1/|k|)$, $k \neq 0$]

• Επίσης, αν η f είναι Lipschitz, εύκολα έπεται ότι η f είναι απολύτως συνεχής, άρα $\hat{f}(k) = O(1/|k|)$ καθώς $|k| \to \infty$.

• Αν η f είναι Hölder συνεχής τάξης $a > 1$, τότε $\hat{f}(k) = O(1/|k|^a)$ και συνεπώς $\hat{f}(k) = O(1/|k|)$ όσο $|k| \to \infty$.

• Γενικότερα, αν η f είναι φραγμένης κύμανσης, τότε $\hat{f}(k) = O(1/|k|)$

Περνάμε στην απόδειξη του θεωρήματος:

Η συνθήκη $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$ καθώς $|n| \to \infty$, οδηγεί στην:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \lambda > 1$ τ.ω.

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{n<|j|\leq \lambda n} |\hat{f}(j)| < \varepsilon \quad (H).$$

Πράγματι, αν $|\hat{f}(n)| \leq \frac{c}{|n|}$ για κάποιο $0 < c < +\infty$ και αν $\varepsilon > 0$, τότε

$$\sum_{n<|j|\leq\lambda n} |\hat{f}(j)| \leq \sum_{n<|j|\leq \lambda n} \frac{c}{|j|} \leq$$

$$\leq \frac{c}{|n|}\cdot(\lambda-1)\cdot n$$ και αν πάρουμε $0 < \lambda - 1 < \frac{\varepsilon}{c}$, έχουμε την (H).

Έστω $\lambda > 1$. Τότε,

$$(\lfloor \lambda n \rfloor + 1)\,\sigma_{\lfloor \lambda n\rfloor}(f,x) -$$

$$-(n+1)\,\sigma_{n+1}(f,x) =$$

(200)

$$= \sum_{k=-\lfloor \lambda n \rfloor}^{\lfloor \lambda n \rfloor} (\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - |k|) \hat{f}(k) e_k(x)$$

$$- \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|) \hat{f}(k) e_k(x) =$$

$$= (\lfloor \lambda n \rfloor + 1) s_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, x) -$$

$$- (n+1) s_n(f,x) - \sum_{n<|k|\leq \lfloor \lambda n \rfloor} |k| \hat{f}(k) e_k(x)$$

$$= (\lfloor \lambda n \rfloor + 1)(s_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f,x) - s_n(f,x))$$

$$+ (\lfloor \lambda n \rfloor - n) s_n(f,x) - \sum_{n<|k|\leq \lfloor \lambda n \rfloor} |k| \hat{f}(k) e_k(x)$$

$$= \sum_{n<|k|\leq \lfloor \lambda n \rfloor} (\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - |k|) \hat{f}(k) e_k(x) +$$

$$+ (\lfloor \lambda n \rfloor - n) s_n(f,x).$$

Άρα, $s_n(f,x) = \dfrac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f,x)$

$$- \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_n(f,x) -$$

$$- \sum_{n<|k|\leq \lfloor \lambda n \rfloor} \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - k}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \hat{f}(k) e_k(x).$$

Έστω ότι για κάποιο $x \in \mathbb{T}$ έχουμε

$\sigma_n(f,x) \longrightarrow \sigma \ (= \sigma(x))$, όταν $n \to \infty$.

Τότε, $|S_n(f,x) - \sigma| \leq$

$$\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \cdot |\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f,x) - \sigma| +$$

$$+ \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} |\sigma_n(f,x) - \sigma| +$$

$$+ \sum_{n < |k| \leq \lfloor \lambda n \rfloor} \frac{\lfloor \lambda n \rfloor - 1 - |k|}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \cdot |\hat{f}(k)|.$$

Ο τελευταίος όρος φράσεται από

$\sum_{n < |k| \leq \lfloor \lambda n \rfloor} |\hat{f}(k)|$, διότι για $|k| > n$,

δηλ. $|k| \geq n+1$ έχουμε ότι

$\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - |k| \leq \lfloor \lambda n \rfloor - n$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\lambda > 1$ τ.ω.

να ισχύει η (H), δηλαδή

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{n < |k| \leq \lfloor \lambda k \rfloor} |\hat{f}(k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης, $|\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f,x) - \sigma| \to 0$,

όσο $n \to \infty$ και

$$\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\lambda}{\lambda - 1} > 0 \quad \text{και}$$

$$\frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\lambda - 1}.$$

Έτσι, παίρνοντας limsup όσο $n \to \infty$

λαμβάνουμε ότι

$$\limsup_{n \to \infty} |s_n(f,x) - \sigma| \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot 0 +$$

$$\frac{1}{\lambda - 1} \cdot 0 + \limsup_{n \to \infty} \sum_{n < |k| \leq \lfloor \lambda n \rfloor} |\hat{f}(k)| < \varepsilon/2$$

και αφού $\varepsilon > 0$ τυχαίο $\Rightarrow$

$s_n(f,x) \longrightarrow \sigma$, όσο $n \to \infty$.

Άρα, αποδείξαμε ότι αν $\sigma_n(f,x) \to \sigma$,

τότε $s_n(f,x) \to \sigma$. Το αντίστροφο ισχύει

πάντα.

Η απόδειξη δείχνει ότι η εξάρτηση της διαφοράς $|s_n(f,x) - \sigma(x)|$ από το x, υπάρχει μόνο μέσω των $|\sigma_{[\lambda n]}(f,x) - \sigma|$ και $|\sigma_n(f,x) - \sigma|$.

Συνεπώς, αν τα $\sigma_n(f,x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάποιο $A \subseteq \mathbb{T}$ τότε αυτές οι διαφορές συγκλίνουν ομοιόμορφα στο 0 για $x \in A$ και άρα η αρχική διαφορά ικανοποιεί την

$$\sup_{x \in A} |s_n(f,x) - \sigma(x)| < \varepsilon$$

$\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$, για κατάλληλο $n_0(\varepsilon)$ ανεξάρτητο του x. □

Πόρισμα: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ που είναι φραγμένης κύμανσης. Τότε,

$$s_n(f,x) \longrightarrow \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{T}$$ και

$s_n(f,x) \longrightarrow f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$ που είναι σημείο συνέχειας της f, δηλαδή $\forall\, x \in \mathbb{T}$ εκτός από ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων.

Απόδειξη: Κάθε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος που είναι φραγμένης κύμανσης και κάθε πραγματική συνάρτηση φραγμένης κύμανσης είναι διαφορά δύο αυξουσών.

Έτσι, έπεται ότι για κάθε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(x+)$, $f(x-)$ σε κάθε $x \in \mathbb{T}$ και είναι ίσα (δηλ. f σ/χης) εκτός από ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων $x \in \mathbb{T}$.

Από το θεώρημα του Fejer έχουμε ότι $\sigma_n(f,x) \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$ και το όριο είναι ίσο με $f(x)$ για x σημείο συνέχειας της f.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Hardy και παίρνουμε ότι τα $S_n(f,x)$ έχουν ίδια σημεία σύγκλισης.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ φραγμένης κύμανσης, τότε $\hat{f}(k) = O(1/|k|)$ όσο $|k| \to \infty$.

↳ <u>Πρόταση</u>: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ φραγμένης κύμανσης. Τότε, $\hat{f}(k) = O(1/|k|)$, όσο $|k| \to \infty$.

<u>Παρατήρηση</u>: Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ φραγμένης κύμανσης, $S_n(f, x) \longrightarrow f(x)$ ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα συνέχειας της f. Αυτό είναι συνέπεια των θεωρημάτων Fejer, Hardy.

29-5-23

<u>Λήμμα</u>: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt < +\infty \quad \text{για κάποιο } \varepsilon > 0.$$

Τότε, $S_n(f, 0) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Απόδειξη:

Είναι $S_n(f, 0) = (D_n * f)(0) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(y) D_n(-y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin\{(n+\frac{1}{2})y\}}{\sin\{y/2\}} f(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin(ny) \frac{f(y)}{\tan(y/2)}\, dy \quad +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(ny) f(y)\, dy .$$

Από λήμμα Riemann-Lebesgue,

$$\mathrm{Re}\, \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(ny) f(y)\, dy \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Επίσης, από υπόθεση η $g(y) = \dfrac{f(y)}{\tan(y/2)}$ είναι επίσης στον $L^1(\mathbb{T})$ καθώς

$$|g(y)| = \frac{|f(y)|}{|\tan(y/2)|} = \frac{|f(y)|}{|\sin(y/2)|} \cdot |\cos(y/2)|$$

$$\leq \frac{|f(y)|}{|y|} \cdot \pi .$$

Άρα, πάλι από λήμμα R-L έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin(ny) \frac{f(y)}{\sin(y/2)}\, dy = i\, \mathrm{Im}\, \hat{g}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Τελικά, $S_n(f,0) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$ $\square$

<u>Πόρισμα</u> (Θεώρημα Dini):

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάποια $x_0 \in \mathbb{T}$, $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{f(x+x_0) - f(x_0)}{x} \right| dx < +\infty \text{, τότε}$$

$$S_n(f, x_0) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0).$$

Απόδειξη:

Εφαρμόζουμε το λήμμα για την $g(x) = f(x+x_0) - f(x_0) \in L^1(\mathbb{T})$ και έχουμε ότι $S_n(g, 0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Όπου $S_n(g, 0) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k) e^{ik0} =$

$$= \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \hat{g}(k) + \hat{g}(0) =$$

$$= \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} e^{ikx_0} \hat{f}(k) + \hat{f}(0) - f(x_0) =$$

$= S_n(f, x_0) - f(x_0)$.

Τελικά, $S_n(f, x_0) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$. $\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν η f είναι Lipschitz, τότε ικανοποιεί τη συνθήκη του Dini.

<u>Πόρισμα</u> (Αρχή τοπικότητας): Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $f = g$ σε κάποιο ανοικτό διάστημα I. Τότε, για κάθε $x \in I$ είτε τα $S_n(f, x)$, $S_n(g, x)$ συγκλίνουν και τα δύο, είτε αποκλίνουν και τα δύο.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in I$. Εφαρμόζουμε το λήμμα για την $(f-g)(x_0 + x)$. Για κατάλληλο $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|(f-g)(x_0 + x)|}{|x|}\, dx = 0 . \quad \square$$