Αθροίσιμες σειρές Fourier

• Θεωρούμε τον υπόχωρο του $L^1(\mathbb{T})$,

$$A(\mathbb{T}) = \{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty \}.$$

• Έστω η απεικόνιση

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & \hat{f} \\ \cap & & \cap \\ L^1(\mathbb{T}) & & (c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty) \end{array}$$

(μετ/μος Fourier)

η οποία είναι καλώς ορισμένη, γραμμική, 1-1 και συνεχής.

$[\ \|\hat{f}\|_\infty = \sup_k |\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1\ ]$

Όμως, ο μετ/μος Fourier από τον $L^1(\mathbb{T})$ στον $c_0(\mathbb{Z})$ δεν είναι επί.

[Θεωρήστε την $a_k = \dfrac{\operatorname{sgn}(k)}{\log|k|}$]

• Όμως, ο μετ/μος Fourier $A(\mathbb{T}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$ είναι επί.

Πράγματι, έστω $(a_k) \in \ell^1(\mathbb{Z})$,

δηλαδή $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty$. Τότε, η σειρά

$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k$ συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{T})$,

αφού $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k e_k\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|$ και ο

$L^1(\mathbb{T})$ είναι Banach. Ακριβώς για

τον ίδιο λόγο, η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k = f$

συγκλίνει ομοιόμορφα.

$$\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k e_k\|_{C(\mathbb{T})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty \right.$$

και $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ Banach]

Δηλαδή, δείξαμε ότι $f \overset{L^1(\mathbb{T})}{\underset{C(\mathbb{T})}{=}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k$

Κοιτάμε τώρα τους συντελεστές

Fourier της f: Για $k \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r e^{irx} \Big) e^{-ikx} \, dx$$

$$= \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{i(r-k)x} \, dx = a_k .$$

Συνεπώς, η $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k$ είναι η αντίστροφη εικόνα της (a_k) μέσω του μετ/μου Fourier.

Έτσι, έχουμε αποδείξει τον παρακάτω τύπο:

$$f \overset{L^1(\mathbb{T})}{\underset{C(\mathbb{T})}{=\!=\!=}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k ,$$

για $f \in A(\mathbb{T})$.

// Σημείωση για τους συντελεστές Fourier της f: Αφού έχουμε L^1-σύγκλιση τριγωνομετρικών πολ/μων στην f, θα μπορούσαμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι

$\hat{f}(k) = a_k$ (παλιό αποτέλεσμα) //

<u>Σχόλιο</u>: Ο τύπος της αντιστροφής μας δείχνει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τον $A(\mathbb{T})$ ως υπόχωρο του $C(\mathbb{T})$ ή εναλλακτικά ότι κάθε $f \in A(\mathbb{T}) \leq L^1(\mathbb{T})$ είναι ίση σ.π. με μια συνεχή συνάρτηση.

- Για $f \in A(\mathbb{T})$ ορίζουμε

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| .$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η $\|\cdot\|_{A(\mathbb{T})}$ είναι νόρμα στον $A(\mathbb{T})$.

Τότε, οι $(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{A(\mathbb{T})})$, $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι ο $(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{A(\mathbb{T})})$ με τον πολ/μο είναι άλγεβρα (η λεγόμενη Fourier άλγεβρα του κύκλου).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $a = (a_k)$, $b = (b_k) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Ορίζουμε τη συνέλιξη των a, b ως $(a * b)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cdot b_{n-k}$.

Η πράξη είναι καλά ορισμένη:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |(a * b)(n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k b_{n-k}| \overset{\text{Tonelli}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_{n-k}| =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n| =$$

$$= \|b\|_{\ell^1} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| = \|a\|_{\ell^1} \cdot \|b\|_{\ell^1}.$$

<u>Πρόταση</u>: Αν $f, g \in A(\mathbb{T})$, τότε $f \cdot g \in A(\mathbb{T})$ και $\widehat{(f \cdot g)}(k) = (\hat{f} * \hat{g})(k)$. Επίσης,

$$\|f \cdot g\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Απόδειξη:

Είναι $f, g \in A(\mathbb{T}) \Rightarrow$

$$f \overset{L^1}{=\!=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k$$

$$g \overset{L^1}{=\!=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) e_k.$$

Άρα, η $f \cdot g$ είναι σ.π. ίση με συνεχή συνάρτηση στον $\mathbb{T}$, άρα $f \cdot g \in A(\mathbb{T})$.

Για $k \in \mathbb{Z}$, $\widehat{(f \cdot g)}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) g(x) e^{-ikx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{imx} \Big) g(x) e^{-ikx} dx =$$

Fubini

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x) e^{-i(n-m)x}\, dx$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)\, \hat{g}(n-m) = (\hat{f} * \hat{g})(n).$$

Και $\|f\, g\|_{A(\mathbb{T})} = \|\widehat{f \cdot g}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} =$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{(f \cdot g)}(n)| =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \cdot \hat{g}(n-m) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| \cdot |\hat{g}(n-m)| =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(n-m)| =$$

$$= \|\hat{f}\|_{\ell^1} \cdot \|\hat{g}\|_{\ell^1} = \|f\|_{A(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{A(\mathbb{T})} . \quad \square$$

<u>Πρόταση</u>: Αν $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ απολύτως συνεχής και $f' \in L^2$, τότε $f \in A(\mathbb{T})$.

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: $\| f \|_{A(\mathbb{T})} \leq \| f \|_1 + \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \cdot \| f' \|_2$.

Πράγματι, είναι

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} | \hat{f}(k) | = | \hat{f}(0) | + \sum_{k \neq 0} | \hat{f}(k) | .$$

Η f είναι απόλυτα σ/χης $\Rightarrow$ η f' υπάρχει σ.π. και $f' \in L^1(\mathbb{T})$, $|\widehat{f'}(k)| = |k| |\hat{f}(k)|$.

Άρα,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} | \hat{f}(k) | = | \hat{f}(0) | + \sum_{k \neq 0} \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|}$$

$$\underset{\text{στον } \ell^2}{\overset{C-S}{\leq}} \| f \|_1 + \Big(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k \neq 0} | \widehat{f'}(k) |^2 \Big)^{1/2}$$

$$= \| f \|_1 + \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \cdot \| f' \|_2 .$$

Όπου, f απολύτως σ/χης $\Rightarrow \| f \|_1 < +\infty$

και $f' \in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \|f\|_2 < +\infty$.

Τελικά, $\|f\|_{A(\mathbb{T})} < +\infty$, άρα $f \in A(\mathbb{T})$.

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|$$

$\square$

10-5-23

Συντελεστές Fourier μέτρων

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια απεικόνιση $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ καλείται μέτρο (μιγαδικό) αν i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Για $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ξ.α.δ.

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

[Η σειρά $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ πρέπει να συγκλίνει απολύτως ώστε να μην εξαρτάται από αλλαγή διάταξης όρων]

Κάθε μιγαδικό μέτρο μπορεί να γραφτεί ως $\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$ όπου τα μ_i είναι θετικά και πεπερασμένα μέτρα.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(X)$ τον χώρο όλων των μιγαδικών, κανονικών μέτρων Borel ενός συμπαγούς χώρου X.

Στην περίπτωση που ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, γνωρίζουμε ότι κάθε μέτρο Borel στον X είναι κανονικό, συνεπώς ο $\mathcal{M}(X)$ είναι σε αυτή την περίπτωση ο χώρος των μιγαδικών μέτρων Borel του X.

Π.χ. στην περίπτωση που $X = \mathbb{T}$, τότε ο $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ είναι ο χώρος των μιγαδικών μέτρων Borel στον $\mathbb{T}$.

Παρακάτω παρουσιάζουμε αποτελέσματα που στη βιβλιογραφία είναι γνωστά ως «Θεώρημα του Riesz»:

• Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε, κάθε $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ορίζει γραμμικό και φραγμένο συναρτησοειδές στον χώρο $C(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ σ/χης} \}$ μέσω του τύπου $f \longmapsto \langle f, \mu \rangle = \int f \, d\bar{\mu}$ $\left(= \overline{\int \bar{f} \, d\mu} \right)$, όπου αν $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, τότε $\bar{\mu} = \mu_1 - i\mu_2$.

• Έστω $\phi_\mu \in C(X)^*$, $\phi_\mu(f) = \langle f, \mu \rangle$. Τότε, η απεικόνιση $\mu \longmapsto \phi_\mu$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, δηλαδή για κάθε $\phi \in C(X)^*$ υπάρχει μοναδικό $\mu \in \mathcal{M}(X)$ τ.ω. $\phi(f) = \int f \, d\bar{\mu}$, $\forall f \in C(X)$.

[Ο $C(X)$ είναι εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_\infty$]

• Για $\mu \in M(X)$ ορίζουμε τη νόρμα του μ ως τη νόρμα του ϕ_μ, δηλαδή $\|\mu\| = \|\phi_\mu\|$. Έτσι, η $\mu \longmapsto \phi_\mu$ γίνεται και ισομετρία. Ειδικότερα, αν μ θετικό, τότε $\|\mu\| = \mu(X)$.

[$\|\mu\| = \|\phi_\mu\|$ και για $f \in C(X)$,

$|\phi_\mu(f)| \leq \|f\|_\infty \cdot \int 1 \, d\mu = \mu(X) \cdot \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \|\mu\| \leq \mu(X)$. Για $f = 1$, $|\phi_\mu(f)| =$

$= \mu(X) \Rightarrow \|\mu\| \geq \mu(X)$.]

<u>Πόρισμα</u>: Αν $\mu, \nu \in M(X)$ τ.ω. $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu \ \ \forall f \in C(X)$, τότε $\mu = \nu$.

// $\phi_\mu = \phi_\nu \Rightarrow \|\mu - \nu\| = \|\nu\| \Rightarrow \mu = \nu$ //

<u>Ορισμός</u>: Για $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ορίζουμε τους συντελεστές Fourier του μ ως

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx}\, d\mu(x) = \overline{\langle e_k, \mu \rangle}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

// $\langle e_k, \mu \rangle = \int_{\mathbb{T}} e^{ikx}\, d\bar{\mu} \Rightarrow \overline{\langle e_k, \mu \rangle} =$

$= \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx}\, d\mu = \hat{\mu}(k)$ //

<u>Πρόταση</u>: 1) Για $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, $(\widehat{\mu+\nu})(k) = \hat{\mu}(k) + \hat{\nu}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ και για $c \in \mathbb{C}$ $(\widehat{c\mu})(k) = c \cdot \hat{\mu}(k)$.

2) $|\hat{\mu}(k)| \leq \|\mu\|$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, άρα $(\hat{\mu}(k)) \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

3) Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ το μέτρο μ που ορίζεται ως $\mu(B) = \int_B f(x)\, d\lambda(x)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$, ανήκει στον $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ και $\hat{\mu}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

[1) Είναι $(\widehat{\mu+\nu})(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx}\, d(\mu+\nu) =$

$= \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx}\, d\mu + \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx}\, d\nu =$

$= \hat{\mu}(k) + \hat{\nu}(k)$ και όμοια

βλέπουμε ότι $(\widehat{c\mu})(k) = c \cdot \hat{\mu}(k)$.

2) Για $k \in \mathbb{Z}$, $|\hat{\mu}(k)| = \left| \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx}\, d\mu \right|$

$\leq \int_{\mathbb{T}} 1\, d\mu = \mu(\mathbb{T}) = \|\mu\|$

$\Rightarrow (\hat{\mu}(k)) \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

3) $\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx}\, d\mu = \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx} f(x)\, dx$

$= \hat{f}(k)$.

<u>Πρόταση</u> (« Parseval ») : Έστω $\mu \in M(\mathbb{T})$ και $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$$\langle f, \mu \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \, d\bar{\mu} = \overline{\int \bar{f} \, d\mu} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) \overline{\hat{\mu}(k)}$$

(Cesaro σύγκλιση). Ειδικότερα, όταν η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \hat{\mu}(k)$ συγκλίνει, τότε

$$\langle f, \mu \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{\mu}(k)}$$

12-5-23

Απόδειξη: Για $N \in \mathbb{N}$ είναι $\sigma_N(f) =$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(f) = F_N * f =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) e_k .$$

Γνωρίζουμε ότι $\sigma_N(f) \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ στον $\mathbb{T}$, για $f \in C(\mathbb{T})$. Άρα, για $f \in C(\mathbb{T})$

είναι $\langle f, \mu \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_N(f), \mu \rangle$;

Είναι $|\langle \sigma_N(f) - f, \mu \rangle| \leq$

$\leq \| \sigma_N(f) - f \|_\infty \cdot \| \bar{\mu} \| =$

$= \| \sigma_N(f) - f \|_\infty \cdot \| \mu \|$, άρα

$$\langle f, \mu \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_N(f), \mu \rangle =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) \langle e_k, \mu \rangle =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) \overline{\hat{\mu}(k)} .$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι αν

$S_N = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) \overline{\hat{\mu}(k)}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, τότε

$$\frac{S_0 + \ldots + S_N}{N+1} = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) \overline{\hat{\mu}(k)} .$$

Αν υπάρχει το $\lim_{N\to\infty} S_N$, τότε

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)}.$$

Επίσης, $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)} =$

$= \langle f, \mu \rangle$ και έτσι, αφού οι μέσοι όροι έχουν το ίδιο όριο με την $(S_N)_N$ έχουμε ότι $\langle f, \mu \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)}$. □

<u>Συνέλιξη δύο μέτρων</u>: Έστω $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$. Για μια $f \in C(\mathbb{T})$ ορίζουμε

$$\phi_{\mu,\nu}(f) = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(t+s)\,d\mu(t)\,d\nu(s).$$

Το $\phi_{\mu,\nu}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $C(\mathbb{T})$ και είναι και φραγμένο. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ είναι

$|\phi_{\mu,\nu}(f)| \leq \|f\|_\infty \|\mu\| \|\nu\| < +\infty.$

Άρα, από το θεώρημα Riesz, υπάρχει μέτρο $\mu * \nu$ (συνέλιξης) με $\phi_{\mu,\nu}(f) = \int_{\mathbb{T}} f \, d(\mu * \nu)$.

Το $\mu * \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ καλείται συνέλιξη των μ, ν.

Για $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ ισχύει ότι

$$(\mu * \nu)(B) = \int_{\mathbb{T}} \mu(B - t) \, d\nu(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \nu(B - t) \, d\mu(t).$$

<u>Πρόταση</u>: Αν $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, τότε

$$\widehat{\mu * \nu}(k) = \hat{\mu}(k) \hat{\nu}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη:

Είναι $\widehat{\mu * \nu}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx} \, d\mu * \nu =$

$$= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} e^{-ik(t+s)} \, d\mu(t) \, d\nu(t) =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{T}} e^{-ikt} \, d\mu(t) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{T}} e^{-iks} \, d\nu(s) \right)$$

$$= \hat{\mu}(k) \cdot \hat{\nu}(k). \quad \square$$

<u>Πόρισμα για το «Parseval»</u>: Αν $\mu \in M(\mathbb{T})$ με $\hat{\mu}(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$, τότε $\mu \equiv 0$.

Απόδειξη: Έστω το $\phi_\mu \in C(\mathbb{T})^*$ που αντιστοιχεί στο μ. Αν δ.ο. $\phi_\mu(f) = 0$ $\forall f \Rightarrow \|\phi_\mu\| = \|\mu\| = 0$, άρα $\mu \equiv 0$.

Έστω λοιπόν $f \in C(\mathbb{T})$, τότε

$$\phi_\mu(f) = \langle f, \mu \rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) \cdot \overline{\hat{\mu}(k)}$$

$= 0$. Τελικά, $\mu \equiv 0$. $\square$

• Έτσι, αν $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ τ.ω.

$\hat{\mu}(k) = \hat{\nu}(k) \Rightarrow \mu \equiv \nu$.

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1) Για $f \in C(\mathbb{T})$, $\int_{\mathbb{T}} f \, d(\mu * \nu) =$

$$= \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\int_{\mathbb{T}} f(x+y) \, d\mu(x)}_{F(y)} \, d\nu(y) \Rightarrow$$

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f \, d(\mu * \nu) \right| \leq \int_{\mathbb{T}} \| F(y) \|_{(\mathbb{T})} \, d\nu(y) \leq$$

$$\leq \| F(y) \|_{C(\mathbb{T})} \cdot \| \nu \|.$$

Και $\| F(y) \|_{C(\mathbb{T})} = \sup_{y \in \mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(x+y) \, d\mu(x) \right|$

$$\leq \sup_{y \in \mathbb{T}} \| f_{-y} \|_{C(\mathbb{T})} \cdot \| \mu \| = \| f \|_{C(\mathbb{T})} \cdot \| \mu \|.$$

Συνεπώς, $\left| \int_{\mathbb{T}} f \, d(\mu * \nu) \right| = \left| \phi_{\mu, \nu}(f) \right| \leq$

$\|f\|_{C(\mathbb{T})} \|\mu\| \cdot \|\nu\|$ και άρα

$\|\phi_{\mu,\nu}\| = \|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \cdot \|\nu\|$.

2) Αν $\mu \in M(\mathbb{T})$ είναι απολύτως σ/χες

ως προς το μέτρο Lebesgue, δηλ.

$d\mu(x) = f(x)dx$, $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$\hat{\mu}(k) = \hat{f}(k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ (το είδαμε).

3) Έστω $\mu, \nu \in M(\mathbb{T})$ με $\mu \ll d\lambda$,

$\nu \ll d\lambda$ (απολύτως σ/χεί ως προς το μέτρο

Lebesgue λ) και παραγώγους R-N

$d\mu(x) = f(x)dx$, $d\nu(y) = g(y)dy$.

Τότε, το $\mu * \nu$ είναι απολύτως σ/χες

ως προς το λ και

$d(\mu * \nu) = (f * g)d\lambda$

// Η παράγωγος Radon-Nykodym:

Έστω $\mu \ll \lambda \Rightarrow \exists\, f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω.

$\mu(B) = \int_B f(x)\, d\lambda(x)$. Λέμε τότε ότι η

f είναι η παράγωγος Radon-Nykodym

και γράφουμε $\quad f = \dfrac{d\mu}{d\lambda}$ //

// Για να δ.ο. $\dfrac{d\,\mu * \nu}{d\lambda} = f * g = \dfrac{d\mu}{d\lambda} * \dfrac{d\nu}{d\lambda}$

, έστω $h \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$$\int_{\mathbb{T}} h\, d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} h(x+y)\, d\mu\, d\nu =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} h(x+y)\, f(x)\, g(y)\, dx\, dy \overset{z = t+s}{=\!=\!=} \ldots$$

$$= \int_{\mathbb{T}} h(z)\, (f * g)(z)\, dz$$ //

15-5-23

Σύγκλιση σειρών Fourier

Ορολογία: Έστω $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Λέμε ότι έχουμε σύγκλιση ως προς τη νόρμα αν $\| S_n(f) - f \|_p \longrightarrow 0$, όσο $n \to \infty$.

Για $f \in C(\mathbb{T})$, $\| S_n(f) - f \|_{C(\mathbb{T})} \longrightarrow 0$, όσο $n \to \infty$.

Ορισμός: Ορίζουμε τον τελεστή

$S_n : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ ή

$S_n : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ για $n \in \mathbb{N}$ με

$f \longmapsto S_n(f)$.

Παρατήρηση: Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ το $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολ/μο, άρα θα έχουμε ότι $S_n(f) \in C(\mathbb{T})$. Ιδιαιτέρως, $S_n(f) \in L^p(\mathbb{T})$ $\forall p \in [1, +\infty)$ (αλλά και για άπειρο).

<u>Ορισμός</u>: Γράφοντας $\|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})}$ θα εννοούμε τη νόρμα του τελεστή S_n, δηλαδή

$$\|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} = \inf\left\{ C > 0 : \|S_n(f)\|_p \leq C \cdot \|f\|_p ,\ f \in L^p(\mathbb{T}) \right\}.$$

Ομοίως έχουμε την $\|S_n\|^{C(\mathbb{T})}$ για $S_n : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$.

<u>Θεώρημα</u>: Έχουμε σύγκλιση στον $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$ [δηλ. $\|S_n(f) - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$] αν και μόνο αν $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \|S_n\|^{L^p(\mathbb{T})} < +\infty$.

Ομοίως, έχουμε σύγκλιση στον $C(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \|S_n\|^{C(\mathbb{T})} < +\infty$.