// Παρατηρήστε ότι η συνθήκη (Ι) είναι κατά κάποιον τρόπο συνθήκη κυρτότητας:

$$\frac{1}{2} a_{k+1} + \frac{1}{2} a_{k-1} \geq a_k$$ //

• Θέτουμε $\Delta_k = a_{k-1} - a_k$ και $\Delta_k^{(2)} = \Delta_k - \Delta_{k+1}$.

Είναι $\Delta_k^{(2)} = a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k \geq 0$

$\Rightarrow \Delta_k \geq \Delta_{k+1}$.

• $\sum_{k=1}^{+\infty} \Delta_k = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{k-1} - a_k \right) =$

$= \lim_{m\to\infty} (a_0 - a_m) = a_0$. Άρα, από θεώρημα Abel είναι

$k \cdot \Delta_k \to 0$, όσο $k \to +\infty$.

• $\sum_{k=1}^{m} k \cdot \Delta_k^{(2)} =$

$= -(m+1) \cdot \Delta_{m+1} + a_0 - a_{m+1} \to a_0$

, όσο $m \to \infty$, συνεπώς η

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\Delta_k^{(2)} \text{ συγκλίνει.}$$

• Θέτουμε τώρα

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\Delta_k^{(2)}\, F_{k-1}(x),$$

$x \in \mathbb{T}$.

Είναι $\sum_{k=1}^{+\infty} \| k\,\Delta_k^{(2)} F_{k-1}(x) \| =$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\Delta_k^{(2)} < +\infty \xRightarrow{L^1(\mathbb{T}) \text{ Banach}}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\Delta_k^{(2)}\, F_{k-1}(x) < +\infty$$

$\Rightarrow f \in L^1(\mathbb{T})$.

Για $k \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)\, e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=1}^{+\infty} n \, \Delta_n^{(2)} F_{n-1}(x) \, e^{-ikx} \, dx$$

$$\underset{=\!=\!=}{\text{F-T}} \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} n \, \Delta_n^{(2)} \left\{ \int_{\mathbb{T}} F_{n-1}(x) e^{-ikx} \, dx \right\}.$$

$$\boxed{\int_{\mathbb{T}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| n \, \Delta_n^{(2)} F_{n-1}(x) \, e^{-ikx} \right| dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n \, \Delta_n^{(2)} < +\infty}$$

Είναι $F_{n-1}(x) = \sum_{j=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n} \right) e^{ijx}$

$\Rightarrow \widehat{F}_{n-1}(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n} \right)$ για

$|k| \leq n-1$.

Άρα, $\hat{f}(k) = \sum_{n=|k|+1}^{+\infty} n \cdot \Delta_n^{(2)} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right).$

Τώρα, για $m \geq 1$ είναι

$$\sum_{n=|k|+1}^{|k|+m} n \Delta_n^{(2)} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) =$$

$$= \dots = a_{|k|} - a_{|k|+m+1} -$$

$$- m \Delta_{|k|+m+1} \xrightarrow{m \to \infty} a_{|k|} .$$

Τελικά, $\hat{f}(k) = \sum_{n=|k|+1}^{+\infty} n \Delta_n^{(2)} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)$

$= a_{|k|}$. $\square$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω.

$\hat{f}(k) = -\hat{f}(-k) \geq 0 \quad \forall \ k \in \mathbb{N}$.

Τότε, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \hat{f}(k) < +\infty$.

Απόδειξη: Χβγ υποθέτουμε ότι

$\hat{f}(0) = 0$. Ορίζουμε

$F(x) = \int_0^x f(y) dy$, $x \in \mathbb{T}$, $F \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow$

$F \in L^1(\mathbb{T})$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι

$\hat{F}(k) = \frac{1}{ik}\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Από Θ. Fejer λαμβάνουμε ότι

$\sigma_n(F, 0) \xrightarrow{n \to \infty} F(0) = 0$, δηλαδή

$$\sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{F}(k) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \hat{F}(0) + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\left(\frac{\hat{f}(k)}{ik} - \frac{\hat{f}(-k)}{ik}\right)$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow$$

$$\hat{F}(0) - 2i\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\frac{\hat{f}(k)}{k}\right\} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\frac{\hat{f}(k)}{k}\right\} \xrightarrow{n \to \infty} -\frac{i\hat{F}(0)}{2}.$$

Και είναι $\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\frac{\hat{f}(k)}{k}\right\} =$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\hat{f}(k)}{k} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\hat{f}(k) \xrightarrow{n \to \infty}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{k}$ $[\hat{f}(k) \to 0$, όσο $|k| \to \infty]$.

Συνεπώς, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{k} = -\frac{1}{2} i \hat{F}(0) \in \mathbb{C}$, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{k}$ συγκλίνει. □

3-5-23

Πόρισμα: Αν $a_k > 0 \ \forall k \geq 1$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ δεν μπορεί να αποτελεί σειρά Fourier κάποιας $L^1(\mathbb{T})$ συνάρτησης.

Απόδειξη: Έστω ότι αποτελούσε.

είναι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k) e^{i(-k)x} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{-\infty} (-a_{-k}) e^{ikx} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(k) a_{|k|} e^{ikx} .$$

Άρα, για $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ τα $\operatorname{sgn}(k) a_{|k|}$ είναι συντ. Fourier κάποιας $f \in L^1(\mathbb{T})$ και είναι τ.ω. $\operatorname{sgn}(k) a_{|k|} = - \operatorname{sgn}(-k) a_{|-k|} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Άρα, από πρόταση $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty$, άτοπο. □

Παραδείγματα

1) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{\log k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1,1,0}} \log|k| e^{ikx}$$

Θέτουμε $a_n = -\dfrac{1}{\log|n|}$, $|n| \geq 2$.

Παρατηρούμε ότι η $f(x) = -\dfrac{1}{\log x}$ είναι κυρτή για $x \geq 2$.

Και $a_{k+1} + a_{k-1} - 2a_k =$

$= f(k+1) + f(k-1) - 2f(k) \geq 0$.

Επίσης, $a_k \to 0$ και $a_k = a_{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Από Kolmogorov η (a_k) είναι οι συντελεστές Fourier κάποιας $g \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow$ η $(-a_k)$ είναι οι συντ. Fourier της $-g \in L^1(\mathbb{T})$.

<u>Πρόταση</u>: Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ απολύτως σ/χης, τότε $\hat{f}(k) = o(1/k)$, δηλαδή $k\hat{f}(k) \longrightarrow 0$, καθώς $k \to \infty$.

Απόδειξη:

Είναι f απολύτως σ/χης $\Rightarrow$ η f' υπάρχει λ-σ.π. και $f' \in L^1(\mathbb{T})$.

Για $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ είναι

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \\ &\widehat{f'}(k) \xrightarrow{|k|\to\infty} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$|k||\hat{f}(k)| \xrightarrow{|k|\to\infty} 0. \quad \square$$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $f \in C^{d-1}(\mathbb{T})$ με $f^{(d-1)}$ απολύτως σ/χης. Τότε $\hat{f}(k) = o(1/k^d)$, δηλ.

$$|k|^d|\hat{f}(k)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Απόδειξη: Είναι $f^{(d)} \in L^1(\mathbb{T})$

και $\left.\begin{array}{l}\widehat{f^{(d)}}(k) = (ik)^d \hat{f}(k) \\ \widehat{f^{(d)}}(k) \xrightarrow{|k|\to\infty} 0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$|k|^d |\hat{f}(k)| \longrightarrow 0$, όσο $|k| \to \infty$

$\Rightarrow \hat{f}(k) = o(1/k^d)$ $\square$

• Παρατήρηση: Για $j \in \{0, 1, \dots, d\}$

είναι $|\hat{f}(k)| = \dfrac{|\widehat{f^{(j)}}(k)|}{|k|^j}$, συνεπώς

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ είναι

$$|\hat{f}(k)| \leq \min_{0 \leq j \leq k} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|k|^j}.$$

Αν τώρα $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, απολύτως

συνεχής, τότε

$$|\hat{f}(k)| \leq \inf_{j \geq 0} \frac{\|f^{(j)}\|_1}{|k|^j}.$$

<u>Ορισμός</u>: Μια $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ καλείται Hölder συνεχής τάξης $a>0$ αν υπάρχει σταθερά $C>0$ τ.ω. $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^a$ $\forall x, y \in \mathbb{T}$.

• Δείκτης συνέχειας μιας $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι η ποσότητα

$$w(f,h) = \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y \in \mathbb{T}, |x-y| \leq h, h>0\}$$

• Υπάρχει και ο L^1-δείκτης συνέχειας: Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ ορίζουμε $\Omega(f,h) = \|f_h - f\|_1$.

<u>Παρατήρηση</u>: Πάντα ισχύει ότι $\Omega(f,h) \leq w(f,h)$, $h>0$:

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$, $h>0$. Είναι

$\Omega(f,h) = \| f_h - f \|_1 =$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} | f(x-h) - f(x) | \, dx$

$|x - h - x| = h \leq h \Rightarrow |f(x-h) - f(x)|$

$\leq \sup\{\ldots\} = \omega(f,h)$

$\Rightarrow \Omega(f,h) \leq \omega(f,h) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} 1 \, dx$

$= \omega(f,h)$.

<u>Θεώρημα</u> Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2} \Omega(f, \frac{\pi}{|k|}) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Απόδειξη:

Για $k > 0$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} \, dx$

$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{i\pi} e^{-ikx} \, dx =$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)\, e^{-ik\left(x - \frac{\pi}{k}\right)}\, dx$$

$$\xlongequal[\text{2π-περιοδικότητα}]{y = x - \frac{\pi}{k}} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{-iky}\, dy .$$

Άρα, $\left|2\hat{f}(k)\right| =$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{k}\right)\right) e^{-ikx}\, dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) \right| dx \xlongequal{y = x + \frac{\pi}{k}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| f\left(y - \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| dy =$$

$$= \left\| f_{\frac{\pi}{k}} - f \right\|_1 = \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right).$$

Για $k < 0$, $2\left|\hat{f}(k)\right| \leq \ldots$

$$\leq \left\| f - f_{\frac{\pi}{|k|}} \right\|_1 = \omega\left(f, \frac{\pi}{|k|}\right). \quad \square$$

Πόρισμα: Αν f Hölder συνεχής τάξης $a>0$, τότε $\hat{f}(k) = O(|k|^{-a})$, καθώς $|k| \to \infty$. [Δηλαδή $|\hat{f}(k)| \leq C|k|^{-a}$ $\forall\, k \neq 0$]

Απόδειξη: Από Hölder συνέχεια, υπάρχει $M>0$ τ.ω. $|f(x)-f(y)| \leq M \cdot |x-y|^a$. Άρα για $h>0$ $|f(x+h)-f(x)| \leq M \cdot h^a$ $\Rightarrow$ $w(f,h) \leq M \cdot h^a$.

Άρα, $\underline{\Omega}(f,h) \leq w(f,h) \leq M \cdot h^a$, $h>0$, συνεπώς από το θεώρημα είναι $|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2} M \cdot \frac{\pi^a}{|k|^a}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. $\square$

Σειρές Fourier για συναρτήσεις του $L^2(\mathbb{T})$

Καθώς είμαστε σε χώρο πιθανότητας, ισχύει ότι $L^2(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$. Συνεπώς, για $f \in L^2(\mathbb{T})$ έχω μετ/μο Fourier.

[Η $(\hat{f}(k))$ είναι καλώς ορισμένη]

Ο $L^2(\mathbb{T})$ έχει μια επιπλέον ιδιότητα, είναι χώρος Hilbert, όπου $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

* Θυμίζουμε ότι $e_k(x) = e^{ikx}$, $x \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση: Το σύνολο $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{T})$.

Απόδειξη: Αρχικά, το $\{e_k\}$ είναι ο/κ: $\langle e_n, e_m \rangle =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{inx} e^{-imx} \, dx =$$

$$= \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Για χώρους Hilbert, γνωρίζατε ότι $[\{e_k\}$ ο/κ βάση$] \Longleftrightarrow$

$[\langle f, e_k \rangle = 0 \ \forall k \Rightarrow f \equiv 0]$

Έστω λοιπόν ότι $\langle f, e_k \rangle = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f \in L^2(\mathbb{T}) \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = 0 \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \quad \hat{f}(k) = 0 \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

στον $L^1(\mathbb{T})$ άρα και στον $L^2(\mathbb{T})$. $\square$

8-5-23

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$, τ.ώ.:

1) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2$ (Parseval)

2) $\displaystyle f \overset{L^2(\mathbb{T})}{=\!=\!=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e_k$

[Δηλαδή, $\displaystyle s_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e_k \xrightarrow{L^2,\ n\to\infty} f$]

3) Ο μετασχηματισμός $L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^2$, $f \longmapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ισομετρία (Plancherel)

4) $\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2}$, δηλαδή

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)}\, dx =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2}$$

(Parseval II)

Απόδειξη:

1) Έχουμε ότι το $\{e_k\}$ είναι ο/κ βάση του $L^2(\mathbb{T})$ και συνεπώς η ταυτότητα Parseval δίνει ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \| f \|^2_{\langle , \rangle}, \quad f \in L^2(\mathbb{T})$$

ισοδύναμα,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \| f \|^2_{\langle , \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{f(x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx = \| f \|_2^2 .$$

2) * Η νόρμα που επάγει το $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ είναι η γνωστή $\|\cdot\|_2$.

Για $f \in L^2(\mathbb{T})$ γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \xrightarrow[]{\|\cdot\|_{\langle,\rangle} \ n\to\infty} f \text{ , ισοδύναμα}$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k = S_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} f .$$

3) Στην ουσία είναι το Riesz-Fisher [κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.]

Έχουμε τον μετ/μο $T : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ με $T(f) = (\hat{f}(k)) = (\langle f, e_k \rangle)_{k\in\mathbb{Z}}$.

• Ο T είναι καλά ορισμένος γιατί

$$\sum_k |\hat{f}(k)|^2 = \sum_k |\langle f, e_k \rangle|^2 =$$

$= \|f\|_2^2 < +\infty$. Επίσης, η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα.

• Η ταυτότητα του Parseval

μας λέει ότι $\|(\hat{f}(k))\|_{\ell^2}^2 = \|f\|_2^2$ ή

$\|T(f)\| = \|f\|_2 \Rightarrow T$ ισομετρία και

άρα 1-1.

• Για το επί: Έστω $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$.

Ορίζουμε $f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{ikx}$,

$f_N \in L^2(\mathbb{T})$ $\forall N \in \mathbb{N}$.

Για $N > M$ είναι $\|f_N - f_M\|_2^2 =$

$= \sum_{k=M+1}^{N} |a_k|^2 \longrightarrow 0$, όσο $N, M \to \infty$,

άρα η (f_N) είναι Cauchy και αφού

ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης, υπάρχει $f \in L^2(\mathbb{T})$

τ.ω. $f_N \longrightarrow f$.

Αφού $\|f - f_N\|_1 \leqslant \|f - f_N\|_2 \xrightarrow{N\to\infty} 0$,

από γνωστό αποτέλεσμα λαμβάνουμε ότι

$(\hat{f}_N)(k) \xrightarrow{N\to\infty} \hat{f}(k)$ και μάλιστα ομοιόμορφα ως προς k. Όμως για κάθε $N > |k|$ ισχύει ότι $(\hat{f}_N)(k) = a_k$ (εξ ορισμού των f_N), συνεπώς

$\hat{f}(k) = a_k$, $k \in \mathbb{Z}$ και άρα

$T(f) = (a_k)$.

"Εναλλακτικά, σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και έχουμε ότι $|\hat{f}(k) - a_k| =$

$= |\hat{f}(k) - \hat{f}_N(k)|$ για $N > |k|$

$\Rightarrow |\hat{f}(k) - a_k| \leq \|f - f_N\|_{L}$ και

παίρνοντας όρια $N \to \infty$ έχουμε ότι $\hat{f}(k) = a_k$. //

4) $1^{ος}$ τρόπος : Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, τότε

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k, g \right\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \langle e_k, g \rangle \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2} .$$

2ος τρόπος: Με χρήση της ταυτότητας πολικότητας $\langle f, g \rangle_{L^2} =$

$$= \frac{1}{4} \left(\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - \right.$$

$$\left. - i\|f-ig\|_2^2 \right) \ldots$$

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Από την Parseval έχουμε ότι $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 < +\infty \Longrightarrow \hat{f}(k) \longrightarrow 0$, όσο $|k| \to \infty$ και έτσι προκύπτει το θεώρημα Riemann-Lebesgue.