13-3-23

Μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood και το θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-ολ/μη και ορίζουμε $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Γνωρίζουμε ότι αν η f είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x\in[a,b]$, τότε η F είναι διαφορίσιμη στο x και $F'(x)=f(x)$. Δηλαδή, $\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x)) \to f(x)$, $h\to 0$

ή $\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} f(t)\,dt \xrightarrow{h\to 0} f(x)$.

Αναλόγως, λαμβάνουμε ότι

$\frac{1}{h}\cdot\int_{x-h}^{x} f(t)\,dt \xrightarrow{h\to 0} f(x)$ για $x\in(a,b)$ σημείο συνέχειας της f.

Δηλαδή, $\frac{1}{h+h'}\cdot\int_{x-h'}^{x+h} f(t)\,dt \xrightarrow{h,h'\to 0} f(x)$ ή

$$\boxed{\frac{1}{\lambda(I)}\cdot\int_I f(y)\,dy \xrightarrow{\lambda(I)\to 0} f(x)} \quad (I)$$

όπου I ανοιχτό διάστημα με $x\in I$ και $\lambda(I)$ το μέτρο Lebesgue του I.

// Το όριο στην (I) λειτουργεί με την

ε, δ έννοια. Για ε>0 ∃ δ>0 τ.ω.

$$\lambda(I) < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{\lambda(I)} \cdot \int_I f(y)\,dy - f(x) \right| < \varepsilon .$$ //

<u>Ερώτημα</u>: Ισχύει η (I) σχεδόν παντού για $f \in L^1(\mathbb{R})$; ή για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

ή για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

<u>Απάντηση</u>: Ναι Θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue

• Αποδεικνύουμε την (I) για $f \in L^1(\mathbb{R})$ και x σημείο συνέχειας της f. x fixed

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και σ/χης στο x, τότε για τυχόν $\varepsilon > 0$ ∃ $\delta > 0$ τ.ω.:

Αν $y \in \mathbb{R}$ με $|y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Αν I ανοικτό διάστημα και $x \in I$ και $\lambda(I) < \delta$, τότε $\forall y \in I$ είναι $|x-y| < \delta$, άρα $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Έτσι $\left| \frac{1}{\lambda(I)} \cdot \int_I f(y)\,dy - f(x) \right| =$

$$\left| \frac{1}{\lambda(I)} \cdot \int_I f(y)\,dy - \frac{1}{\lambda(I)} \cdot \int_I f(x)\,dy \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\lambda(I)} \cdot \int_I (f(y) - f(x))\,dy \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda(I)} \cdot \int_I |f(y) - f(x)|\,dy \overset{y \in I}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda(I)} \cdot \int_I \varepsilon\,dy = \frac{1}{\lambda(I)} \cdot \varepsilon \cdot \lambda(I) = \varepsilon.$$

// Δηλαδή, για $f \in L^1(\mathbb{R})$, x_0 σημείο που η f είναι σ/χης, τότε αν I ανοιχτό διάστημα με $x_0 \in I$, είναι

$$\frac{1}{\lambda(I)} \cdot \int_I f(x)\,dx \xrightarrow{\lambda(I) \to 0} f(x_0)$$

λ το μέτρο Lebesgue. //

<u>Παρατήρηση</u>: Η ίδια απόδειξη γενικεύεται για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, όπου $I = B$ ανοιχτές μπάλες και x σημείο σ/χιας της f, $x \in B$:

$$\frac{1}{\lambda(B)} \cdot \int_B f(y)\, d\lambda(y) \xrightarrow{\lambda(B) \to 0} f(x) \,!$$

• Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\lambda_n(B)} \cdot \int_B |f|\, d\lambda_n$$

// Supremum ως προς κλειστές μπάλες $B \ni x$. //

Η απεικόνιση $x \xmapsto{f^*} f^*(x)$ καλείται μεγιστική (μη κεντραρισμένη) συνάρτηση της f.

Η μεγιστική, κεντραρισμένη συνάρτηση της f είναι η

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \cdot \int_{B(x,r)} |f|\, d\lambda_n .$$

[Θα δείξουμε ότι $Mf \leq f^* \leq 2^n Mf$]

<u>Παρατήρηση</u>: Για f μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^n$, τότε $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:

$$Mf(x) \leq f^*(x) \leq 2^n Mf(x).$$

Απόδειξη: Προφανώς, ισχύει ότι $Mf(x) \leq f^*(x)$.

Αν B μπάλα που περιέχει το x, τότε $B \subseteq B(x, 2r)$, όπου r η ακτίνα της B.

Έχουμε τότε:

$$\frac{1}{\lambda_n(B)} \cdot \int_B |f| \, d\lambda_n \leq \frac{1}{\lambda_n(B)} \cdot \int_{B(x,2r)} |f| \, d\lambda_n =$$

$$= \frac{\lambda_n(B(x,2r))}{\lambda_n(B)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\lambda_n(B(x,2r))} \cdot \int_{B(x,2r)} |f| \, d\lambda_n}_{Mf(x)} \leq$$

$$\leq \frac{(2r)^n \cdot \lambda_n(B(0,1))}{r^n \cdot \lambda_n(B(0,1))} \cdot Mf(x) =$$

$$= 2^n \cdot Mf(x) \Rightarrow f^*(x) = \sup_{x \in B} \{ \ldots \} \leq 2^n Mf(x)$$

□

// $\lambda_n(B(x, r)) = \lambda_n(B(0, r))$. //

* <u>Άσκηση</u>: Για $f(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}(x)$ είναι

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{b-x}, & x \leq a \\[2ex] \dfrac{b-a}{x-a}, & x \geq b \\[2ex] 1, & a<x<b \end{cases}$$

$$Mf(x) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{2(b-x)}, & x \leq a \\[2ex] 1, & a<x<b \\[2ex] \dfrac{b-a}{2(x-a)}, & x \geq b \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε η f^* είναι μετρήσιμη. Συγκεκριμένα, $\forall a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > a\}$ είναι ανοικτό, δηλαδή η f^* είναι κάτω ημισυνεχής.

Απόδειξη:

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^n$ με $f^*(x) > a$.

Τότε, υπάρχει ανοικτή μπάλα B τ.ω. $x \in B$ και $\dfrac{1}{\lambda_n(B)} \cdot \displaystyle\int_B |f| \, d\lambda_n > a$.

Τότε, για κάθε $y \in B$ είναι

$$f^*(y) = \sup_{y \in D} \frac{1}{\lambda_n(D)} \cdot \int_D |f| \, d\lambda_n \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_n(B)} \cdot \int_B |f| \, d\lambda_n > a \Rightarrow f^*(y) > a, \Rightarrow$$

$B \subseteq E_a = \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > a\}$. Συνεπώς, το

$E_a = (f^*)^{-1}((a, +\infty))$ είναι ανοικτό (για

κάθε στοιχείο του, x, υπάρχει μπάλα, B,

να περιέχεται σ' αυτό). $\square$

// Μια πραγματική συνάρτηση f λέγεται

κάτω ημισυνεχής σ' ένα x_0 αν

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Όπου $\liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \{ \inf_{(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}} f(x) \} =$

$$= \sup_{\delta > 0} \{ \inf_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}} f(x) \}$$

Μια συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής

ανν $f^{-1}(a, +\infty)$ ανοικτό $\forall a \in \mathbb{R}$. //

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι μέτρου. Ένας τελεστής, ορισμένος σε υπόχωρο των $(X, \mathcal{A}, \mu)$-μετρήσιμων που παίρνει τιμές στις $(Y, \mathcal{B}, \nu)$-μετρήσιμες, λέγεται υπογραμμικός αν

$|T(c\cdot f)| = c\cdot|Tf| \quad \forall\, c \geq 0$ και

$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg| \quad \forall\, f, g$ στο π.ο. του T

□

* Μιλάμε για μετρήσιμες συναρτήσεις και όχι απλώς μετρήσιμες απεικονίσεις.