$\langle z\phi(y) - y\phi(z), z \rangle = 0 \Rightarrow$

$\phi(y)\langle z, z\rangle - \phi(z)\langle y, z \rangle = 0 \Rightarrow$

$\phi(y) = \phi(z)\langle y, z\rangle = \langle y, \overline{\phi(z)}\cdot z \rangle$ και αφού

το $y \in H$ επιλέχθηκε τυχαία, για
$a = \overline{\phi(z)}\cdot z \in H$, λαμβάνουμε ότι
$\phi = \phi_a = \phi_{\overline{\phi(z)}\cdot z}$.

* Μάλιστα, για $\phi \in H^*$, $\phi = \phi_a$, το $a \in H$
είναι μοναδικό:
Έστω επιπλέον ότι $\phi(y) = \langle y, b\rangle$ για κάποιο
$b \in H$. Τότε, $\forall y \in H$ είναι $\langle y, b \rangle = \langle y, a\rangle$
$\Rightarrow \langle y, b - a\rangle = 0 \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow a = b$. $\square$

6-3-23

• Απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz:

Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Έχουμε ότι

$0 \leq \langle x + ty, x + ty\rangle = \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle +$
$+ t^2\|y\|^2 \quad \forall\, x, y \in X,\ t \in \mathbb{R}$. Άρα $\Delta \leq 0$

$\Rightarrow 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\cdot\|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow$

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$.

Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Για $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε ότι $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$, για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$ και $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{it}$, για κάποιο $t \in \mathbb{R}$.

Τότε, $0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \|x\|^2 + \bar{\lambda}\langle x, y \rangle +$
$+ \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle x, y \rangle) +$
$+ \|y\|^2 \cdot |\lambda|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(|\lambda| e^{-i\theta} \cdot |\langle x, y \rangle| e^{it})$
$+ |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \cdot |\lambda| \cdot |\langle x, y \rangle| \cdot \cos(t - \theta) +$
$+ |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2$.

Επιλέγουμε το θ έτσι ώστε $\cos(t - \theta) = -1$ και έχουμε ότι:

$$\|x\|^2 - 2 \cdot |\lambda| \cdot |\langle x, y \rangle| + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 \geq 0 \quad \forall\, |\lambda| \geq 0.$$

Επιλέγουμε και $|\lambda| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ (υποθέτοντας ότι $y \neq 0$) και έχουμε ότι $0 \leq \|x\|^2 - 2\frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot |\langle x, y \rangle|$
$+ \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} \cdot \|y\|^2 = 2\|x\|^2 - 2\frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot |\langle x, y \rangle|$

$$\Rightarrow \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|^2 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad \square$$

// Δηλαδή, ξεκινώντας με μια ποσότητα που εξαρτάται από το λ και είναι σίγουρα ≥ 0, επιλέγουμε κατάλληλο λ για να καταλήξουμε εκεί που θέλουμε. //

<u>Ορισμός</u>: Έστω X γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα υποσύνολο $\{e_i : i \in I\} \subseteq X$ λέγεται ορθοκανονικό αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_j^i$.

<u>Παρατήρηση</u>: Κάθε ορθοκανονικό σύνολο E είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Πράγματι, αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $e_1, \dots, e_n \in E$ τ.ω. $\sum_1^n \lambda_i e_i = 0$, τότε $\forall j = 1, \dots, n$ είναι $\langle \sum_1^n \lambda_i e_i , e_j \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$.

Άρα, το E είναι γραμ. ανεξ. □

<u>Ορισμός</u>: Ένα αριθμήσιμο ο/κ σύνολο E λέγεται βάση του χώρου X αν

$$X = \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I, e_i \in E\}} = \overline{\langle E \rangle}$$

<u>Πρόταση</u>: Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη: Καθώς ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, κάθε ο/κ σύνολο είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, αν $\{e_i : i \in I\} \subseteq H$ ο/κ σύνολο, τότε για κάθε $i \neq j$ είναι $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Και σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο δεν μπορούμε να έχουμε υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων με $\|e_i - e_j\| \geq \delta$ για κάποιο $\delta > 0$ (γιατί;).

Θεωρούμε τώρα την κλάση των ο/κ υποσυνόλων του H με τη διάταξη του υποσυνόλου. Κάθε αλυσίδα ως προς αυτή τη διάταξη έχει άνω φράγμα.
// Πράγματι, για $\mathcal{C} = \{E_j, j \in J\}$ αλυσίδα, το $\bigcup_{j \in J} E_j$ είναι άνω φράγμα. //

Από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό σύνολο. Έστω $E = \{e_i : i \in I\}$ αυτό, τότε E αριθμήσιμο και θα είναι ο/κ βάση.

Πράγματι, αν $H \neq \overline{\text{span}\{e_i : i \in I\}}$, τότε $\exists\ v \in H \setminus \{0\}$ και $v \notin \overline{\text{span}\{e_i : i \in I\}}$. Επιλέγουμε τότε $v' \perp \overline{\text{span}\{e_i : i \in I\}}$, $v' \neq 0$ και χβγ $\|v'\| = 1$.

Προκύπτει έτσι το $\{v'\} \cup E$ που είναι ορθοκανονικό και «μεγαλύτερο» από το μεγιστικό $E = \{e_i : i \in I\}$, άτοπο.

Τελικά $H = \overline{\text{span}\{e_i : i \in I\}}$ και έχουμε ορθ. ο/κ βάση του H. $\square$

<u>Λήμμα</u>: Αν X χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_i : i \in I\}$ ο/κ σύνολο, τότε $\forall x \in X$ είναι

$$d(x, \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}) = \left\|x - \sum_1^n \langle x, e_i \rangle e_i\right\|.$$

Απόδειξη:

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ τυχαία και $\sum_1^n \lambda_i e_i \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ (τυχαίο).

Παρατηρούμε ότι,

$$\left\langle x - \sum_1^n \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_1^n (\langle x, e_i \rangle - \lambda_i) e_i \right\rangle =$$

$$= \langle x, \sum_1^n \langle x, e_i\rangle e_i\rangle - \langle x, \sum_1^n \lambda_i e_i\rangle -$$

$$- \langle \sum_1^n \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_1^n \langle x, e_i\rangle e_i\rangle +$$

$$+ \langle \sum_1^n \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_1^n \lambda_i e_i\rangle =$$

$$= \sum_1^n \overline{\langle x, e_i\rangle} \cdot \langle x, e_i\rangle - \sum_1^n \overline{\lambda_i} \langle x, e_i\rangle -$$

$$- \sum_{i,j} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_j\rangle} \langle e_i, e_j\rangle +$$

$$+ \sum_{i,j} \overline{\lambda_j} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, e_j\rangle =$$

$$= \sum_1^n |\langle x, e_i\rangle|^2 - \sum_1^n \overline{\lambda_i}\langle x, e_i\rangle - \sum_1^n |\langle x, e_i\rangle|^2 +$$

$$+ \sum_1^n \overline{\lambda_i} \langle x, e_i\rangle = 0 .$$

Άρα, από το Π.Θ. έχουμε ότι

$$\|x - \sum_1^n \lambda_i e_i\|^2 = \|x - \sum_1^n \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 +$$

$$+ \|\sum_1^n (\langle x, e_i\rangle - \lambda_i) e_i\|^2 .$$

Δηλαδή, $\underbrace{\|x - \sum_1^n \langle x, e_i\rangle e_i\|}_{\in \, \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\}} \leq \underbrace{\|x - \sum_1^n \lambda_i e_i\|}_{\text{τυχαίο στοιχείο του } \{\|x-y\| : \, y \in \langle e_1, \dots, e_n\rangle\}}$.

Άρα, $d(x, \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}) =$

$$= \| x - \sum_{1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \| . \quad \square$$

<u>Πρόταση</u> (Ανισότητα Bessel): Σ' έναν χώρο με εσωτ. γιν. αν $\{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονικό σύνολο, τότε

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \le \| x \|^2 .$$

Απόδειξη:

Έστω $I = \mathbb{N}$ και $s_n(x) = \sum_{1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Είναι $\langle x - s_n(x), s_n(x) \rangle = \sum_{1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 -$

$$\sum_{i,j} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \cdot \langle e_i, e_j \rangle =$$

$$= \sum_{1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 - \sum_{1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = 0 .$$

Από το Π.Θ. λαμβάνουμε ότι

$$\| x \|^2 = \| x - s_n(x) \|^2 + \| s_n(x) \|^2 \ge \| s_n(x) \|^2 =$$

$$= \| \sum_{1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \|^2 \overset{\text{Π.Θ.}}{=\!=\!=} \sum_{1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 .$$

Αφήνοντας $n \to +\infty$, παίρνουμε ότι

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 . \quad \square$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω H χώρος Hilbert και $E = \{e_i : i \in I\}$ αριθμήσιμο ο/κ σύνολο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) Το $E = \{e_i : i \in I\}$ είναι ο/κ βάση.

2) Αν $x \in H$ με $\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall i$, τότε $x = 0$.

3) Αν $x \in H$ και ορίσουμε $s_n(x) = \sum_{1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$, τότε $s_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

4) Ισχύει η ταυτότητα Parseval: $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$.

Απόδειξη: Αρχικά, είναι $I = \mathbb{N}$.

1) → 2): Υποθέτουμε ότι $H = \overline{\text{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}}$. Άρα, για $x \in H$ υπάρχει $(y_n)_n \subseteq E$ τ.ω. $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Έστω ότι $\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall e_i \in E$ $\Rightarrow \langle x, y_n \rangle = 0 \ \forall n$. Είναι $\langle x, x \rangle =$ $= \langle x, \lim_n y_n \rangle = \lim_n \langle x, y_n \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

// Το $\langle\,,\rangle$ είναι $\|\cdot\|$-σ/χης. //

2) → 3): Από Bessel, έχουμε ότι

$$\sum_{1}^{+\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \overset{(*)}{\leq} \|x\|^2 < +\infty$$, άρα για $n > m$

είναι $\|S_n(x) - S_m(x)\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\|^2 =$

$= \sum_{k=m+1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \xrightarrow{m,n \to +\infty} 0$ (λόγω της $(*)$).

Π.Θ.

Άρα, η $\underbrace{(S_n(x))_n}_{y_n}$ είναι $\overset{(\|\cdot\|)}{\text{Cauchy}}$

και αφού ο H

είναι Hilbert, συγκλίνει. Έστω $y = \lim_n y_n$.

Θα δ.ο. $y = x$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ (fixed). Τότε,

$\langle x - y, e_k\rangle = \langle x - \lim_n y_n, e_k\rangle =$

$= \lim_{n\to\infty} \langle x - S_n(x), e_k\rangle =$

$= \lim_{n\to\infty} \{\langle x, e_k\rangle - \langle S_n(x), e_k\rangle\}$.

Για $n \geq k$ είναι $\langle S_n(x), e_k\rangle =$

$= \langle \sum_{1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, e_k\rangle = \sum_{1}^{n} \langle x, e_i\rangle \delta_{ik} =$

$= \langle x, e_k\rangle$.

Άρα, $\langle x-y, e_k\rangle = \lim_n \langle x - s_n(x), e_k\rangle =$

$= \lim_n \{\langle x, e_k\rangle - \langle s_n(x), e_k\rangle\} =$

$= \lim_n \{\langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle\} = 0 \Rightarrow$

$\langle x-y, e_k\rangle = 0 \quad \forall k$ και άρα από υπόθεση,

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Τελικά, $x = \lim_n s_n(x) = \sum_1^\infty \langle x, e_i\rangle e_i$.

3) → 4): Στην απόδειξη της Bessel, είδατε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \|s_n(x)\|^2 =$

$= \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_1^n |\langle x, e_i\rangle|^2 \xrightarrow[s_n(x)\to x]{n\to\infty} \sum_1^\infty |\langle x, e_i\rangle|^2$.

Άρα, $\|x\|^2 = \sum_1^{+\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$.

4) → 1): Απ' την ίδια ισότητα, έχουμε ότι

$\|x - s_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|s_n(x)\|^2 =$

$= \|x\|^2 - \sum_1^n |\langle x, e_i\rangle|^2 \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0$

(υπόθεση), άρα $\|x - s_n(x)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Όμως,

$s_n(x) \in \operatorname{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή έχουμε

$x = \lim_n S_n(x) \in \overline{\text{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}}$ και

καθώς το $x \in H$ επιλέχθηκε τυχαία,

$H = \overline{\text{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}}$. □

<u>Συζυγείς τελεστές</u>

<u>Θεώρημα</u>: Έστω H χώρος Hilbert και $T: H \to H$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Τότε, $\forall\, y \in H$ $\exists!$ $T^*(y) \in H$ τ.ω. $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$, $x \in H$.

Αυτή η διαδικασία ορίζει γραμμικό και φραγμένο τελεστή T^*, ο οποίος καλείται συζυγής του T. Επιπλέον, $(T^*)^* = T$ και $\|T^*\| = \|T\|$.

Απόδειξη: έστω $y \in H$, τότε η απεικόνιση

$\phi_y(x) = \langle T(x), y \rangle$, $x \in H$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές του H. Εύκολα δείχνεται ότι είναι καλώς ορισμένο και πράγματι είναι γραμμικό: $\phi_y(a_1x_1 + a_2x_2) = \langle T(a_1x_1 + a_2x_2), y \rangle =$

$= a_1 \langle T(x_1), y \rangle + a_2 \langle T(x_2), y \rangle =$

$= a_1 \phi_y(x_1) + a_2 \phi_y(x_2)$.

Επίσης, για $x \in H$ είναι

$|\phi_y(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|$

$\Rightarrow \phi_y$ φραγμένο και $\|\phi_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$.

Άρα, από το θεώρημα του Riesz, υπάρχει μοναδικό $T^*(y) \in H$ τ.ω.

$\phi_y(x) = \langle x, T^*(y) \rangle$, δηλαδή

$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \ \forall \ x \in H$.

Δηλαδή, για κάθε $y \in H$ $\exists!$ $T^*(y)$ με την παραπάνω ιδιότητα και έτσι έχει οριστεί καλά η απεικόνιση $y \xmapsto{T^*} T^*(y)$.

Η T^* είναι γραμμική: Έστω $y_1, y_2 \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, τότε $\forall x \in H$ είναι

$\langle x, T^*(\lambda y_1 + \mu y_2) \rangle = \langle T(x), \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle =$

$= \bar{\lambda} \langle T(x), y_1 \rangle + \bar{\mu} \cdot \langle T(x), y_2 \rangle =$

$= \bar{\lambda} \langle x, T^*(y_1) \rangle + \bar{\mu} \langle x, T^*(y_2) \rangle =$

$= \langle x, \lambda T^*(y_1) + \mu T^*(y_2) \rangle \xRightarrow{\forall x}$

$T^*(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda T^*(y_1) + \mu T^*(y_2)$.

Ο T^* είναι φραγμένος: έστω $y \in H \setminus \{0\}$,

τότε $\|T^*(y)\|^2 = \langle T^*(y), T^*(y) \rangle =$

$= \langle T(T^*(y)), y \rangle \overset{C-S}{\leq} \|T(T^*(y))\| \cdot \|y\| \leq$

$\leq \|T\| \cdot \|T^*(y)\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|T^*(y)\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$

($y=0$ ~> trivial), άρα T^* φραγμένος και

$\|T^*\| \leq \|T\|^{(1)}$.

Τέλος, ισχύει ότι $(T^*)^* = T$:

Για κάθε $x, y \in H$ $\langle T^*(x), y \rangle = \overline{\langle y, T^*(x) \rangle}$

$= \overline{\langle T(y), x \rangle} = \langle x, T(y) \rangle$, άρα

$(T^*)^* = T$ και από την (1) έπεται ότι

$\|T\| = \|T^*\|$. $\left(\|(T^*)^*\| \leq \|T^*\| \text{ ή } \|T\| \leq \|T^*\| \right)$

□