• <u>Αρμονική Ανάλυση</u>: Μάθημα 1ο: Σταφυλογιάννης.

(X,A,μ) χώρος μέτρου $\mathcal{L}^p(X,A,\mu)=\{f:X\to\mathbb{K} \mid f$ μετρήσιμη και $\int|f|^p d\mu<+\infty\}$

όπου: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

- Ο $\mathcal{L}^p$ είναι γραμμικός χώρος γιατί:

Αν $f,g:X\to\mathbb{K}$ μετρήσιμες με $\int|f|^p d\mu<+\infty$ και $\int|g|^p d\mu<+\infty$ και τότε: $f+g$ είναι μετρήσιμη και $|f+g|^p\le(|f|+|g|)^p\le(2\max\{|f|,|g|\})^p=2^p\max\{|f|^p,|g|^p\}$ $\le 2^p(|f|^p+|g|^p)$ και άρα: $\int|f+g|^p d\mu\le 2^p\left(\int|f|^p d\mu+\int|g|^p d\mu\right)<+\infty$

και επίσης προφανώς έχουμε ότι αν $c\in\mathbb{K}$ τότε: $|cf|^p=|c|^p|f|^p$ και άρα έχουμε ότι: $\int|cf|^p d\mu=|c|^p\int|f|^p d\mu<+\infty$ και η cf είναι μετρήσιμη και άρα ο $\mathcal{L}^p$ είναι γραμμικός χώρος.

- Ορίζουμε $\|f\|_p=\left(\int|f|^p d\mu\right)^{1/p}$ για κάθε $f\in\mathcal{L}^p(X,A,\mu)$

• <u>Παρατήρηση</u>: η $\|\cdot\|_p$ στον $\mathcal{L}^p$ δεν είναι νόρμα γιατί υπάρχουν $f\neq 0$ τέτοιες ώστε: $\int|f|^p d\mu=0$ (είναι ημινόρμα). Ταυτίζοντας όμως αυτές τις συναρτήσεις με το μηδέν παίρνουμε χώρο με νόρμα. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p$: $f\sim g \iff \|f-g\|_p=0$ $\iff f=g$ μ-σχεδόν παντού και ονομάζουμε $L^p(X,A,\mu)$ τον χώρο πηλίκο. Στον L^p ορίζουμε: $[f]+[g]=[f+g]$ και $c\cdot[f]=[cf]$ και οι πράξεις αυτές είναι καλά ορισμένες και ο L^p γίνεται γραμμικός χώρος. Στο εξής θα γράφουμε f αντί για $[f]$ για τα στοιχεία του L^p

- Στον L^p η $\|\cdot\|_p$ ορίζει νόρμα:

1. $\|f\|_p\ge 0$ και $\|f\|_p=0 \Rightarrow |f|=0$ μ-σχ.π $\Rightarrow f\overset{L^p}{=}0$
2. $\|cf\|_p=|c|\|f\|_p$, $\forall c\in\mathbb{K}$
3. $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$ (Ανισότητα Minkowski)

• Η ανισότητα Minkowski είναι συνέπεια της ανισότητας Hölder:

$\int|f\cdot g|\,d\mu\le\|f\|_p\|g\|_q$ με $p,q>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Scanned with CamScanner

• **Θεώρημα:** ο χώρος $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ με την νόρμα $\|\cdot\|_p$ είναι χώρος Banach, δηλαδή η μετρική που επάγεται από την νόρμα είναι πλήρης.

• **Λήμμα:** Έστω X χώρος με νόρμα. ΤΑΕΙ:

1. Ο X είναι πλήρης χώρος με νόρμα
2. Αν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του X τέτοια ώστε: $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ συγκλίνει του X

– **Απόδειξη:** • Έστω αρχικά ότι ο X είναι πλήρης και έστω και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία τέτοια ώστε: $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty$ και αν τώρα: $S_n=\sum_{m=1}^{n}x_m,\ n\in\mathbb{N}$ τότε παρατηρούμε ότι:

Ισχυρισμός: η $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική: Πράγματι: $\|S_n-S_m\|=\|\sum_{k=m+1}^{n}x_k\|\le\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|$ αν $n>m$ στο $\mathbb{N}$ και έχουμε τώρα ότι αφού: $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$ έπεται ότι δοθέντος $\varepsilon>0$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $\sum_{n\ge n_0(\varepsilon)}\|x_n\|<\varepsilon$ και άρα: $\forall n>m\ge n_0(\varepsilon)$:

$\|S_n-S_m\|\le\sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{\infty}\|x_k\|<\varepsilon$ και άρα η $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία του X και αφού αυτός είναι πλήρης έπεται ότι η $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα και άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ συγκλίνει και έχουμε το 1ο ζητούμενο.

• Αντίστροφα έστω ότι ισχύει η (2). και τότε έχουμε ότι: αν πάρουμε μια $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του X η οποία είναι βασική, τότε παρατηρούμε ότι θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι συγκλίνουσα.

Έχουμε ότι αφού η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική έπεται ότι: $\forall k\in\mathbb{N}: \exists n_k\in\mathbb{N}: \|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^k}$ $\forall n,m\ge n_k$ και μάλιστα μπορούμε να διαλέξουμε τα n_k ώστε: $n_1<n_2<\dots\dots$

Τώρα έχουμε ότι: $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι από την υπόθεση έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=x$ συγκλίνει στο X και άρα:

$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=x$ και αφού έχουμε ότι: το άθροισμα μέσα στο όριο είναι τηλεσκοπικό έπεται ότι: $\lim_{j\to\infty}(x_{n_{j+1}}-x_{n_1})=x \Rightarrow \lim_{j\to\infty}x_{n_{j+1}}=x+x_{n_1}$ και άρα η $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία και αφού είναι υπακολουθία της βασικής ακολουθίας $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, έπεται από θεώρημα ότι και η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο: $x_{n_1}+x$.

CS Scanned with CamScanner

- <u>Απόδειξη Θεωρήματος:</u>

Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία του L^p με $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$. Θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < +\infty$ του L^p και άρα από το λήμμα θα έχουμε ότι ο $(L^p, \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach. Ορίζουμε τώρα: $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ και $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$, $n \in \mathbb{N}$. Από την ανισότητα Minkowski έχουμε ότι: $\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p$ και άρα έχουμε ότι: $\|\sigma\|_p = \left(\int \sigma^p d\mu\right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \left(\int \sigma_n^p d\mu\right)^{1/p}$ $\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι: $|\sigma(x)| < \infty$ μ-σχ.π και άρα η σειρά $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει απολύτως μ-σχ.π και άρα τώρα αν: $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ τότε θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $s_n \xrightarrow{L^p} s$ [redacted] Δηλαδή: $\|s_n - s\|_p \longrightarrow 0$. Γνωρίζουμε όμως ότι: $|s_n - s|^p \xrightarrow{\mu-\sigma\chi.\pi} 0$ γιατί η $s = \sum_{n=1}^{\infty}$ [redacted] f_n συγκλίνει απολύτως μ-σχ.π και άρα οι ουρές της $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ συγκλίνουν στο 0 μ-σχ.π. Επίσης έχουμε ότι: $|s_n(x) - s(x)|^p \leq$ [redacted] $(|s_n(x)| + |s(x)|)^p \leq (2\max\{|s_n(x)|, |s(x)|\})^p \leq 2^p \max\{\sigma_n(x), \sigma(x)\}^p \leq 2^{p+1}\sigma(x)^p$ $\in L^p$ και άρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι: $\|s_n - s\|_p \longrightarrow 0$

• <u>Ο χώρος $L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$:</u> $\mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f$ μετρήσιμη και $\|f\|_{\infty} < \infty \}$
όπου: $\|f\|_{\infty} = \inf\{ t > 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > t\}) = 0 \}$ το ουσιώδες φράγμα της f.

- <u>Παρατηρήσεις:</u>

1. $\{x \in X \mid |f(x)| > t\}$ φθίνοντα καθώς το t αυξάνει και άρα από την μονοτονία του μέτρου $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > t\})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Επομένως τώρα από την συνέχεια του μέτρου $\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \xrightarrow{t \downarrow t_0} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t_0\})$ και άρα έχουμε ότι:
<u>$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_{\infty}\}) = 0$</u> αν πάρουμε $t \downarrow \|f\|_{\infty}$

CS Scanned with CamScanner

2. $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι γραμμικός χώρος:

- $\|cf\|_\infty = |c|\cdot\|f\|_\infty$, $\forall c\in\mathbb{K}$
- $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ (Minkowski για $p=\infty$)

- Καλούμε $f\sim g$ ανν $\|f-g\|_\infty=0$ ανν $f=g$ μ-σχ.π

L^∞ = κλάσεις ισοδυναμίας. Ορίζουμε πράξεις σε κλάσεις ισοδυναμίας ώστε $(L^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ να είναι χώρος με νόρμα.

• Θεώρημα: Ο $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ με την $\|\cdot\|_\infty$ είναι χώρος Banach.

- Έστω $(f_n)_{n\geq 1}^\infty$ βασική ακολουθία και έστω $A_{n,m}=\{x\in X: |f_n(x)-f_m(x)|>\|f_n-f_m\|_\infty\}$ και τότε από παραπάνω παρατήρηση $\mu(A_{n,m})=0$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$. Θέτουμε: $A=\bigcup_n\bigcup_m A_{n,m}$. Έχουμε: $\mu(A)\le\sum_{n,m}\mu(A_{n,m})=0$ και άρα: $\mu(A)=0$ και για $x\in A^c$ έχουμε ότι: Ητα $|f_n(x)-f_m(x)|\le\|f_n-f_m\|_\infty$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$. Άρα απ' αυτό έπεται ότι $\forall x\in A^c$ έχουμε ότι η αριθμητική ακολουθία $(f_n(x))_{n\geq 1}^\infty$ είναι βασική και άρα συγκλίνει. Άρα: $\forall x\in A^c$: $\exists f(x)\in\mathbb{K}$ με $f_n(x)\to f(x)$. Τώρα: $|f_n(x)-f(x)|=\lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\le\lim_{m\to\infty}\|f_n-f_m\|$ $\forall x\in A^c$. Δοθέντος $\varepsilon>0$ έχουμε ότι υπάρχει $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$, $\forall n\geq n(\varepsilon)$. Άρα: $\forall x\in A^c$, $\forall n\geq n(\varepsilon)$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in A^c}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$, $\forall n\geq n(\varepsilon)$. Έπεται επομένως ότι: $\|f_n-f\|_\infty\le\varepsilon$, $\forall n\geq n(\varepsilon)$ αφού $\mu(X\setminus A^c)=0$ και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχαίο έχουμε ότι: $\|f_n-f\|_\infty\to 0$.

<u>Ορισμός</u>: Αν $p,q>1$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ οι p,q λέγονται <u>συζυγείς εκθέτες</u>. Επίσης τα 1 και $+\infty$ είναι συζυγείς εκθέτες.

Scanned with CamScanner

• <u>Αρμονική Ανάλυση:</u> Μάθημα 2ο: Σναδοφορικής

– <u>Ο Δυϊκός του L^p</u>:

• <u>Γραμμικοί Τελεστές:</u> X, Y γραμμικοί χώροι σε σώμα $\mathbb{K}$ με νόρμα.

$T: X \to Y$ είναι <u>γραμμική</u> αν $T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in X$

Μια γραμμική απεικόνιση είναι <u>φραγμένη</u> αν: υπάρχει σταθερά $C > 0$ με: $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ $\forall x \in X$.

• <u>Πρόταση:</u> Αν X, Y είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής τότε τα ΤΕΕΙ:

1. T συνεχής
2. T συνεχής στο 0
3. T φραγμένος

[redacted]

<u>Απόδειξη:</u> • (1) ⇒ (2): προφανές

• (2) ⇒ (3).: Παρατηρούμε ότι αφού ο T είναι συνεχής στο 0 έπεται ότι για $\varepsilon < 1$: $\exists\, \delta > 0$ ώστε: αν $\|x\| < \delta$ τότε: $\|T(x)\| < \varepsilon$. Έστω τώρα $x \in X$ και τότε αν $x \neq 0$: $\left\| x \frac{\delta}{\|x\|} \right\| \leq \delta$

$\Rightarrow \left\| T\left(x \frac{\delta}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|T(x\delta)\| = \frac{\delta}{\|x\|} \|T(x)\| < \varepsilon < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{1}{\delta}\|x\| = C\|x\|$

και αν x[redacted]$=0$ πάλι ισχύει η ανισότητα και έχουμε τελικά ότι ο T είναι φραγμένος.

• (3) ⇒ (1).: Έχουμε αρχικά ότι υπάρχει $C > 0$: $\forall x \in X$: $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ και θα αποδείξουμε ότι ο T είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$. ~~Έστω $x \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$~~ Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T είναι συνεχής στο 0 γιατί αν ο T είναι συνεχής στο 0 τότε αν πάρουμε $x_0 \in X$ έχουμε ότι: $\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\|$ και εύκολα αποδεικνύεται ότι ο T είναι συνεχής στο x_0. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και τότε έχουμε ότι: για $\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0$ έχουμε ότι αν $\|x\| < \delta$ τότε: $\|T(x)\| \leq C\|x\| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$ και άρα ο T είναι συνεχής στο 0.

• <u>Ορισμός:</u> Αν X, Y είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής τότε ορίζουμε την νόρμα τελεστή: $\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X: \|T(x)\| \leq C\|x\|\}$

Scanned with CamScanner

Παρατηρήσεις:

1. Ισχύει ότι: $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \forall x \in X$
γιατί παρατηρούμε ότι: αυτό είναι προφανές

2. $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1, x \in X\}$
γιατί παρατηρούμε ότι αν $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ τότε: $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\|$
και άρα: $\sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq \|T\|$. Αντίστροφα έχουμε ότι:
αν $A =$ [redacted] $\sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$ τότε αν $x \in X$: με $x \neq 0$: $\|T(x)\| = \|x\| \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$
$\leq A\|x\|$ και άρα: $\|T\| \leq A$ και άρα έχουμε την ζητούμενη ισότητα.

- Πρόταση: Αν X, Y είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα τότε ο χώρος $B(X,Y)$ των γραμμικών τελεστών από τον X στον Y είναι γραμμικός χώρος με νόρμα και αν ο Y είναι χώρος Banach τότε και ο $B(X,Y)$ είναι [redacted] χώρος Banach.

. Απόδειξη: Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος και παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $S, T \in B(X,Y)$ τότε έχουμε ότι: $S+T : X \to Y$ και αυτός είναι γραμμικός τελεστής γιατί: $(S+T)(ax+by) = S(ax+by) + T(ax+by) = aS(x) + bS(y) + aT(x) + bT(y)$
$= a(S(x)+T(x)) + b(S(y)+T(y)) = a(S+T)(x) + b(S+T)(y)$ και άρα είναι γραμμικός τελεστής ο $S+T$ και επίσης έχουμε ότι είναι και φραγμένος γιατί: αν $x \in X$ τότε:
$\|(S+T)(x)\| = \|S(x)+T(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \overset{(1)}{\leq} \|S\|\|x\| + \|T\|\|x\| = (\|S\| + \|T\|)\|x\|$
$= C\|x\|$ όπου $C = \|S\| + \|T\| \in (0, \infty)$ αφού οι S, T είναι φραγμέν[redacted]οι και άρα τελικά $S+T \in B(X,Y)$ και τώρα έχουμε ότι: με όμοιο τρόπο αν πάρουμε $c \in \mathbb{K}$ και $T \in B(X,Y)$ τότε: $cT \in B(X,Y)$ και άρα τελικά ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος. Τώρα ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος με νόρμα την $\|T\|$ για $T \in B(X,Y)$ γιατί: $\|T\| \geq 0$
και αν $T = 0 \Rightarrow \|T\| = 0$ και επίσης ~~αν $c \in \mathbb{K}$: $\|cT\| = \inf$~~ αν $\|T\| = 0$ τότε αφού $\forall x \in X$: $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| = 0 \Rightarrow T(x) = 0, \forall x \in X \Rightarrow T = 0$. Επίσης από το (1). έπεται ότι: αν $S, T \in B(X,Y)$: $\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$ και με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και: αν $c \in \mathbb{K}$ και $T \in B(X,Y)$ τότε: $\|cT\| = |c|\,\|T\|$ γιατί: αν $c \in \mathbb{K}$ και $T \in B(X,Y)$ τότε: $\|cT(x)\| = |c|\,\|T(x)\| \leq |c|\,\|T\|\,\|x\| = C\|x\|$ όπου: $C = |c|\|T\| \in (0, +\infty)$ αφού ο T είναι φραγμένος και $\|cT\| \leq |c|\,\|T\|$. Επίσης: $\|T\| = \|c^{-1}cT\|$
$= |c|^{-1}\|cT\| \leq \|T\|$ και άρα τελικά: $\|cT\| = |c|\,\|T\|$ και άρα είναι νόρμα.

Scanned with CamScanner

Τώρα αν ο Y είναι χώρος Banach θα αποδείξουμε ότι και ο $B(X,Y)$ είναι Banach και έχουμε ότι αν $(T_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία του $B(X,Y)$ που είναι βασική τότε παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $x\in X$: $\|T_n(x)-T_m(x)\| \leq \|T_n-T_m\|\,\|x\|$ και άρα από αυτό έπεται ότι $\forall x\in X$ η $\cancel{((T_n-T_m)(x))}$ $(T_n(x))_{n\geq 1}$ είναι βασική ακολουθία του Y και αφού αυτός είναι χώρος Banach έπεται ότι η $(T_n(x))_{n\geq 1}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία του Y και άρα ορίζεται $T: X\to Y$ τέτοιος ώστε: $T(x)=\lim_{n\to\infty} T_n(x)$, $\forall x\in X$ και έχουμε ότι αυτός είναι γραμμικός τελεστής από την γραμμικότητα του ορίου και των γραμμικών τελεστών T_n. Επίσης ο T είναι και φραγμένος τελεστής γιατί έχουμε ότι αφού η $(T_n)_{n\geq 1}$ είναι βασική ακολουθία για $\varepsilon=1$ υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$: $\|T_n-T_m\|\leq 1$, $\forall n,m\geq n_1$. Θέτουμε $C=\max\{\|T_1\|,\|T_2\|,\dots,\|T_{n_1}\|+1\}$ και τότε: $\|T(x)\| =$ [redacted] $\lim\|T_n(x)\| \leq \lim\|T_n\|\,\|x\| = \|x\|\lim\|T_n\| \leq C\|x\|$ και άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\|\leq C$. Τώρα: $\|T_n-T\|\to 0$: Έστω $\varepsilon>0$ και τότε έχουμε ότι $\exists\, n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\|T_n-T_m\|<\varepsilon$, $\forall n,m\geq n(\varepsilon)$. Για αυθαίρετο τώρα $x\in X$: $\|T_n(x)-T_m(x)\| = \|(T_n-T_m)(x)\| \leq \|T_n-T_m\|\,\|x\|$ και άρα για $n\geq n(\varepsilon)$ και $x\in X$: $\|T_n(x)-T(x)\| = \lim_{m\to\infty}\|T_n(x)-T_m(x)\| \leq \lim_{m\to\infty}\|T_n-T_m\|\,\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$ και άρα: $\forall n\geq n(\varepsilon)$: $\|T_n-T\|\leq\varepsilon$ και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν: $\|T_n-T\|\to 0$

- **Ορισμός**: Αν X είναι χώρος Banach τότε ο χώρος των φραγμένων τελεστών $B(X,\mathbb{K})$ είναι ο δυϊκός χώρος του X και συμβολίζεται με X^* και τα στοιχεία του δηλαδή οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές $\varphi: X\to\mathbb{K}$ λέγονται φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή.

Νόρμα: $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(x)| : \|x\|\leq 1\}$ αν $\varphi\in X^*$.

- Αν X, Y είναι χώροι Banach και υπάρχει $T: X\to Y$, 1-1, επί και φραγμένος γραμμικός τελεστής και ο T^{-1} είναι επίσης φραγμένος τότε οι X και Y καλούνται [redacted] ισόμορφοι.

Αν επιπλέον ο T είναι ισομετρία, τότε οι X, Y λέγονται ισομετρικά ισόμορφοι

Scanned with CamScanner

• Αρμονική Ανάλυση: Μάθημα 3ο.

Θεώρημα: ο $L^p(X,\mathcal{A},\mu)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(X,\mathcal{A},\mu)$.
Αν $g\in L^q$ τότε: $\varphi_g(f)=\int fg\,d\mu$ $(f\in L^p)$ ορίζει στοιχείο του $(L^p)^*$ και η απεικόνιση $T: L^q\to (L^p)^*$ με T([redacted]) $= \varphi_g$ είναι γραμμική ισομετρία.

- **Απόδειξη:** Για σταθερό $g\in L^q$ έχουμε ότι αν πάρουμε $f\in L^p$ τότε από την ανισότητα Hölder: $\int|fg|\,d\mu \le \|f\|_p\cdot\|g\|_q<+\infty$ και άρα η $\varphi_g: L^p\to\mathbb{K}$ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση. Επίσης παρατηρούμε ότι αυτό είναι γραμμικό συναρτησοειδές γιατί αν πάρουμε $f_1,f_2\in L^p$ και $a\in\mathbb{K}$ τότε: $\varphi_g(af_1+f_2)=\int(af_1+f_2)g\,d\mu$ $= a\int f_1 g\,d\mu+\int f_2 g\,d\mu = a\varphi_g(f_1)+\varphi_g(f_2)$ (για σταθερό $g\in L^q$) και άρα είναι γραμμικός τελεστής ο φ_g για σταθερό $g\in L^q$. Επίσης για σταθερό $g\in L^q$ έχουμε ότι η φ_g είναι και φραγμένη γιατί: $\forall f\in L^p$: [redacted] $|\varphi_g(f)|=|\int fg\,d\mu|$ $\le\int|fg|\,d\mu\le\|f\|_p\|g\|_q$ από ανισότητα Hölder και αφού: $g\in L^q \Rightarrow \|g\|_q<+\infty$ και άρα φ_g είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και: $\|\varphi_g\|\le\|g\|_q$ και άρα τελικά $\varphi_g\in(L^p)^*$, $\forall g\in L^q$, και άρα ο $T: L^q\to(L^p)^*$ με $T(g)=\varphi_g$ είναι καλά ορισμένος τελεστής και εύκολα ελέγχεται και η γραμμικότητά του.
Τώρα παρατηρούμε ότι: ο T είναι και ισομετρία γιατί έχουμε ότι: αρχικά: $\forall g\in L^q$: $\|T(g)\|=\|\varphi_g\|\le\|g\|_q$ όπως αποδείξαμε παραπάνω. Ορίζουμε τώρα: $f=|g|^{q-1}\mathrm{sgn}(g)$ και έχουμε τώρα ότι: ⊛ $|\varphi_f(g)|=|\int fg\,d\mu|=\int|g|^q\,d\mu=\|g\|_q^q$ και ⊛: $\|f\|_p=\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}=\left(\int|g|^{p(q-1)}\,d\mu\right)^{1/p}=\left(\int|g|^q\,d\mu\right)^{1/p}=\|g\|_q^{q/p}$ και άρα έχουμε ότι: $|\varphi_g(f)|=\|g\|_q^q=\|g\|_q\cdot\|g\|_q^{q-1}=\|g\|_q\cdot\|f\|_p$ $(p/q=q-1)$ και άρα: $\|\varphi_g\|\ge\|g\|_q$ και άρα τελικά: $\|\varphi_g\|=\|g\|_q=\|T(g)\|$ και ο T είναι ισομετρία. Μένει να αποδείξουμε ότι ο <u>T είναι επί:</u>

<u>1η περίπτωση:</u> $\mu(X)<+\infty$: Έστω $\varphi\in(L^p)^*$ και ορίζουμε v: [redacted] $\to\mathbb{K}$: $A\to\varphi(1_A)$ είναι μέτρο και $v\ll\mu$. Από το Θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g: X\to\mathbb{K}$ τέτοια ώστε $v(A)=\int_A g\,d\mu$, $\forall A\in\mathcal{A}$. Από αυτό τώρα έπεται όμως ότι: $\varphi(f)$ $=\int fg\,d\mu$ για f απλή του L^p. Πράγματι: αν $f=\sum_{i=1}^n a_i$ [redacted] 1_{A_i} τότε: $\varphi(f)$ $=\sum_{i=1}^n a_i\varphi(1_{A_i})=\sum_{i=1}^n a_i v(A_i)=\sum_{i=1}^n a_i\int_{A_i}g\,d\mu=\int fg\,d\mu$.

CS Scanned with CamScanner

- Αποδεικνύουμε τώρα ότι $g \in L^q$:

Έχουμε ότι από θεώρημα υπάρχουν απλές μετρήσιμες $h_n \geq 0$, $h_n \leq h_{n+1}$ και $h_n \uparrow |g|$.
Ορίζουμε $f_n = h_n^{q-1} \operatorname{sgn}(g)$ απλή. Τώρα: $\varphi(f_n) = \int f_n g \, d\mu = \int h_n^{q-1} |g| \, d\mu$
$\geq \int h_n^q \, d\mu = \|h_n\|_q^q$ και επίσης έχουμε τώρα ότι: $|\varphi(f_n)| \leq \|\varphi\| \, \|f_n\|_p$
$= \|\varphi\| \, \|h_n\|_q^{q-1}$ γιατί: $\|f_n\|_p$ [redacted] $\left(\int |f_n|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\int |h_n|^{p(q-1)} \, d\mu\right)^{1/p}$

$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{q-1}{q} = \frac{1}{p} \Rightarrow p(q-1) = q\right) = \left(\int |h_n|^q \, d\mu\right)^{1/p} = \|h_n\|_q^{q/p} = \|h_n\|_q^{q-1}$

$\Rightarrow \frac{q}{p} = q-1$

και άρα από τα παραπάνω έχουμε ότι: $\|h_n\|_q^q \leq \|\varphi\| \, \|h_n\|_q^{q-1} \Rightarrow \|h_n\|_q \leq \|\varphi\|$
$\forall n \in \mathbb{N}$ και αφού τώρα: ~~$|h_n|^q \uparrow |g|^q$ $h_n^q \geq 0$~~ [redacted] $h_n^q \uparrow |g|^q$ άρα: $\int |g|^q \, d\mu$
$= \lim \int h_n^q \, d\mu \leq \|\varphi\| < +\infty$ από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης γιατί: $h_n^q \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$h_n^q \leq h_{n+1}^q$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $h_n^q \uparrow |g|^q$ και άρα έχουμε ότι ο ~~Τ είναι επί γιατί αφού~~
$g \in L^q$. Αποδεικνύουμε τώρα ότι: $\varphi(f) = \int fg \, d\mu$, $\forall f \in L^p$. Είδαμε ότι αυτό ισχύει για
$f \in L^p$ απλές. Ορίζουμε $\varphi_g(f) = \int fg \, d\mu$, $\forall f \in L^p$. Οι απλές του L^p είναι πυκνές του L^p
και αφού οι φ και φ_g είναι συνεχείς πρέπει $\varphi = \varphi_g$ [redacted] σε όλον τον L^p και άρα:
τελικά $T(g) = \varphi_g$, $\forall g \in L^q$ είναι γραμμική ισομετρία και επί.

<u>2η περίπτωση:</u> Αν το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο (αναφέραμε την 1η περίπτωση όπου το μέτρο μ είναι πεπερασμένο) δηλαδή: έχουμε: Έστω (X_n) ακολουθία ξένων ανά 2 συνόλων στην A με $\mu(X_n) < +\infty$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ..... (απόδειξη στις σημειώσεις).

• <u>Θεώρημα:</u> Έστω (X, A, μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε ο $L^1(\mu)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^\infty(\mu)$.

- <u>Απόδειξη:</u> Αν $g \in L^\infty(\mu)$ τότε: $\varphi_g(f) = \int fg \, d\mu$, $\forall f \in L^1(\mu)$ ορίζει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές γιατί αρχικά: $|\varphi_g(f)| = \left|\int fg \, d\mu\right| \leq \int |fg| \, d\mu \leq$ ~~$\|f\|_\infty \int |g| \, d\mu = \|f\|_\infty \|g\|_1$~~
$\|g\|_\infty \int |f| \, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty$ γιατί $f \in L^1$ και $g \in L^\infty$ και άρα η φ_g είναι καλά ορισμένη και φραγμένη [redacted] $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_\infty < \infty$. Η γραμμικότητα τώρα ελέγχεται όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Τώρα θεωρούμε τον τελεστή: $T: L^\infty \to (L^1)^*$ με
$T(g) = \varphi_g$ και αυτός είναι καλά ορισμένος και γραμμική ισομετρία (η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα) γιατί: δοθέντος $\varepsilon > 0$.

Scanned with CamScanner

$\mu(\{x\in X \mid |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$ γιατί: αν: $\mu(\{x\in X \mid |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) = 0$ τότε: $\|g\|_\infty \le \|g\|_\infty - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < 0$ άτοπο. Τώρα επειδή το μ είναι σ-πεπερασμένο υπάρχει $B \subseteq \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ τέτοιο ώστε $0 < \mu(B) < +\infty$ και θέτουμε: $f = 1_B\, sgn(g) \in L^1(\mu)$. Τώρα: $|\varphi_g(f)| = |\int fg\,d\mu| = |\int_B |g|\,d\mu| = \int_B |g|\,d\mu \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\mu(B) = (\|g\|_\infty - \varepsilon)\|f\|_1$ και άρα: $\|g\|_\infty - \varepsilon \le \|\varphi_g\|$, $\forall \varepsilon > 0$ αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και άρα $\|g\|_\infty \le$ [redacted] $\|\varphi_g\| \le \|g\|_\infty \Rightarrow \|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$ και άρα ο T είναι γραμμική ισομετρία. Τώρα θα αποδείξουμε ότι ο T είναι επί.

<u>1η περίπτωση</u>: $\mu(X) < +\infty$: Έστω $\varphi \in L^1(\mu)^*$ και θέτουμε $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ με $\nu(A) = \varphi(1_A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$ και το ν ορίζει μέτρο το οποίο επαληθεύεται εύκολα. Επίσης: $|\nu(A)| = |\varphi(1_A)| \le \|\varphi\|\,\mu(A)$ και άρα: $\nu \ll \mu$. Από το Θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g : X \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε: $\nu(A) = \int_A g\,d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$. Η σχέση τώρα: $\varphi(f) = \int fg\,d\mu$ ισχύει για f: απλές του $L^1(\mu)$. Αποδεικνύουμε ότι: $g \in L^\infty(\mu)$: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν ισχύει και τότε έχουμε ότι: $\forall M > 0$ ώστε: $\mu(\underbrace{\{x\in X \mid |g(x)| > M\}}_{A}) > 0$ και θέτουμε $f = 1_A\, sgn(g)$ και τότε: $\varphi(f) = \int fg\,d\mu = \int_A |g|\,d\mu \geq M\mu(A) = M\|f\|_1$ και άρα: $\|\varphi\| \geq M$ και αφού το $M > 0$ ήταν τυχόν έπεται ότι το φ είναι μη φραγμένο και άρα άτοπο, και άρα πρέπει $g \in L^\infty(\mu)$.
Έπεται ότι η φ_g είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Έχουμε τώρα ότι $\varphi_g = \varphi$ για απλές του L^1 και από συνέχεια έχουμε ότι $\varphi_g = \varphi$ σε όλο τον L^1 αφού οι απλές του L^1 είναι πυκνές του L^1 και άρα: $\varphi_g(f) = \int fg\,d\mu$, $\forall f \in L^1$ και άρα είναι επί.

- <u>$\nu \ll \mu$</u>: αν: ~~$|\nu(A)| \le C\mu(A)$, $\forall A\in\mathcal{A}$ όπου $C > 0$ και $C < +\infty$~~ $\forall A \in \mathcal{A}$ με: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

<u>Radon-Nikodym</u>, για πεπερασμένα μέτρα: Έστω μ, ν 2 πεπερασμένα μέτρα του μετρήσιμου χώρου $(X, \mathcal{A})$ ώστε: $\nu \ll \mu$. Τότε υπάρχει μοναδική μ-σχ.π μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, +\infty)$ ώστε: $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Scanned with CamScanner

• <u>Αρμονική Ανάλυση:</u> Μάθημα 4ο:

<u>Σχόλια:</u> Το πρόσημο ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται ως: $\text{sgn}(z) = \frac{z}{|z|}$ [redacted] , $z \neq 0$

Όταν δείχνουμε ότι: ο T είναι επί παίρναμε $\varphi \in (L^p)^*$ και ψάχνουμε ένα $g \in L^q$ ώστε: $Tg = \varphi$. Υποθέταμε ότι: $\mu(X) < \infty$ και ορίζουμε $\nu(A) = \varphi(1_A)$ [redacted]. Ορίζουμε απλές συναρτήσεις $0 \leq h_n \uparrow |g|$ (όπου $g = \frac{d\nu}{d\mu}$ παράγωγος Radon-Nikodym) και $f_n = h_n^{q-1}\,\text{sgn}(g)$ και αυτές είναι απλές όταν $g: X \to \mathbb{R}$ και έτσι η απόδειξη δουλεύει, οπότε δείχνουμε ότι ο T είναι επί και όταν η φ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Για την γενική περίπτωση: $\varphi \in ($ [redacted] $L^p)^*$ γράφουμε: $\varphi(f) = \text{Re}\,\varphi(f) + i\,\text{Im}\,\varphi(f)$ και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα για τα $\text{Re}\,\varphi(f)$ και $\text{Im}\,\varphi(f)$ και παίρνουμε $g_1, g_2: X \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε: $\cancel{g = g_1 + i g_2}$ $\text{Re}\,\varphi(f) = \int f g_1\, d\mu$ και $\text{Im}\,\varphi(f) = \int f g_2\, d\mu$, $\forall f \in L^p$. Τότε η $g = g_1 + i g_2$ δίνει $\varphi(f) = \int f g\, d\mu$ και επίσης έχουμε ότι $g \in L^q$ γιατί $g_1, g_2 \in L^q$ αφού ο L^q είναι γραμμικός χώρος, υπόχωρος του $\mathbb{C}$.

– $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. <u>Προσέγγιση συναρτήσεων του L^p από "καλές" συναρτήσεις.</u>

– <u>Πρόταση:</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε οι απλές συναρτήσεις $s: X \to \mathbb{K}$ με $\mu(\{x \in X: s(x) \neq 0\}) < \infty$ είναι πυκνές στον $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\forall p \geq 1$, $p < \infty$.

Έστω X μετρικός χώρος, $\mathcal{A} = B(X)$ Borel-σ-άλγεβρα του X.

Ένα μέτρο Borel $\mu: B(X) \to [0, \infty]$ λέγεται <u>κανονικό</u> αν:

i. $\mu(K) < \infty$ $\forall K \subseteq X$ συμπαγές

ii. $\mu(B) = \inf\{\mu(V): V: \text{ανοιχτό } B \subseteq V\}$

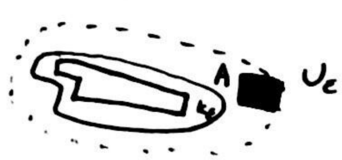
iii. $\mu(B) = \sup\{\mu(K): K: \text{συμπαγές } K \subseteq B\}$

<u>Ορισμός:</u> Έστω X ένας μετρικός χώρος. Ο X λέγεται <u>τοπικά συμπαγής</u> αν $\forall x \in X$ $\exists r > 0$: $V_r(x) = \{y \in X:$ [redacted] $d(y,x) < r\}$ να είναι συμπαγές.

Scanned with CamScanner

- <u>Πρόταση:</u> Έστω (X,d) ένας τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και μ ένα κανονικό μέτρο Borel. Τότε: $C_c(X) = \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f:$ συνεχής με συμπαγή φορέα $\}$ είναι πυκνός στον $\overline{L^p(X, \mathcal{B}(X), \mu)}$ για $1 \le p < \infty$.
(φορέας $supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$)

- <u>Απόδειξη:</u> Έστω αρχικά $f \in L^p$. Θέλουμε να βρούμε $\forall \varepsilon > 0$ μια $g_\varepsilon \in C_c(X)$ τέτοια ώστε: $\|f - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. Από την πρόταση 1η έχουμε ότι αυτό αρκεί να το αποδείξουμε για απλές στον L^p γιατί τότε γενικά για $f \in L^p$ και $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι αφού οι απλές είναι πυκνές στον L^p έπεται ότι υπάρχει s: απλή τέτοια ώστε: $\|f - s\|_p < \varepsilon/2$ και αφού τώρα: έχουμε το θεώρημα για ~~s απλή~~ απλές στον L^p έπεται ότι υπάρχει $g \in C_c(X)$ τέτοια ώστε: $\|s - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ και άρα τελικά: $\|f - g\|_p \le \|f - s\|_p + \|s - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. Έστω επομένως $f \in L^p$ απλή και έστω $f(X) \setminus \{0\} = \{a_1, \dots, a_k\}$ και $A_j = f^{-1}(\{a_j\})$ και τότε: $f = \sum_{j=1}^{k} a_j 1_{A_j}$ και αφού $f \in L^p$ έπεται ότι: $\mu(A_j) < \infty$. Τώρα παρατηρούμε ότι: αν $f_1, \dots, f_k$ είναι συναρτήσεις $C_c(X)$ τέτοιες ώστε: $\|1_{A_j} - f_j\|_p < \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{k} |a_j|}$ τότε έχουμε ότι: $\|f - \underbrace{\sum_{j=1}^{k} a_j f_j}_{\in C_c(X)}\|_p \le \sum_{j=1}^{k} |a_j| \|1_{A_j} - f_j\|_p < \varepsilon$ και άρα από αυτό έπεται ότι αρκεί να προσεγγίσω την 1_A με συναρτήσεις του $C_c(X)$ για $A \in \mathcal{A}$, με $\mu(A) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την κανονικότητα του μέτρου έχουμε ότι: $\exists\, V_\varepsilon$ ανοιχτό τέτοιο ώστε: $A \subseteq V_\varepsilon$ και $\mu(V_\varepsilon \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης $\exists\, K_\varepsilon$ συμπαγές τέτοιο ώστε: $K_\varepsilon \subseteq A$ και $\underline{\mu(A \setminus K_\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$.



Για κάθε $x \in X$: $\exists\, r_x > 0$ τέτοιο ώστε: $\overline{U(x, r_x)}$ να είναι συμπαγές.
Για κάθε $x \in K_\varepsilon$: $\exists\, \delta_x > 0$ με $\delta_x < r_x$ τέτοιο ώστε: $U(x, \delta_x) \subseteq V_\varepsilon$
Από συμπάγεια του K_ε έχουμε ότι $\exists\, x_1, \dots, x_n$ τέτοια ώστε: $\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \delta_{x_i}/2) \supseteq K_\varepsilon$
και έστω $V = \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \delta_{x_i}/2)$ ανοιχτό και: $K_\varepsilon \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Τότε έχουμε ότι το $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U(x_i, \delta_{x_i}/2)}$ είναι συμπαγές και $\overline{V} \subseteq V_\varepsilon$. Ορίζουμε: $f(x) = \frac{d(x, V^c)}{d(x, V^c) + d(x, K_\varepsilon)}$ και έχουμε ότι: $f(x) = 0$ για $x \in V^c$ και $f(x) = 1$ για $x \in K_\varepsilon$ και $0 \le f \le 1$, και η f είναι συνεχής.
Τώρα ο φορέας της $f \subseteq \overline{V}$ = συμπαγές και άρα $f \in C_c(X)$. Επίσης: $1_{K_\varepsilon} \le 1_A \le 1_{V_\varepsilon}$

Scanned with CamScanner

και $1_{K_\varepsilon} \le f \le 1_{V_\varepsilon}$ και: $\|f - 1_A\|_p \le \mu(V_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$ αφού: $\|f - 1_A\|^p \le \|1_{V_\varepsilon \setminus K_\varepsilon}\|$ ...

- **Χώροι Hilbert:** $\forall \varepsilon > 0: \exists V_\varepsilon$: ανοικτό και F_ε: κλειστό τέτοιο ώστε: $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq V_\varepsilon$

X

Ένας γραμμικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{K}$ λέγεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν υπάρχει μια συνάρτηση $\langle , \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ με:

1. $\langle x,x \rangle \geq 0, \ \forall x \in X$ και $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$
2. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}, \ \forall x,y \in X$
3. $\langle ax+y, z \rangle = a\langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle, \ \forall x,y,z \in X, \ \forall a \in \mathbb{K}$

Ορίζουμε: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}, \ \forall x \in X$ και αυτή είναι νόρμα.

• **Πρόταση:** Έστω X γραμμικός χώρος με [redacted] εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ και θέτουμε $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}, \ \forall x \in X$ και τότε ο X με την $\|\cdot\|$ γίνεται χώρος με νόρμα.

- **Απόδειξη:** Αρχικά έχουμε ότι αν: $x \in X$: $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0 \iff \langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Επίσης αν $a \in \mathbb{K}$ και $x \in X$: $\|ax\| = \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = \sqrt{a\bar{a}\langle x,x \rangle} = \sqrt{|a|^2 \langle x,x \rangle} = |a|\sqrt{\langle x,x \rangle} = |a|\|x\|$

Τώρα έχουμε ότι: αν $x,y \in X$: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ από την ανισότητα Cauchy-Swhartz:

$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|\|y\|, \ \forall x,y \in X$

• **Κανόνας Παραλληλογράμμου:** Σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει ότι $\forall x,y \in X$:

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

- **Απόδειξη:** $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,y \rangle - \langle y,x \rangle$

$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

CS Scanned with CamScanner

• Παρατήρηση: Σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνεχής συνάρτηση ως προς την νόρμα.

– Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες τέτοιες ώστε: $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον X. Θα αποδείξουμε ότι: [redacted] $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. Τώρα παρατηρούμε ότι: $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle|$

$= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle|$

$\le |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \le \|x_n\| \underset{\downarrow \atop 0}{\|y_n - y\|} + \underset{\downarrow \atop 0}{\|x_n - x\|}\, \|y\| \longrightarrow 0$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

▸ Ορισμός: Ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

▸ Ορισμός: Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in X$. Τα x, y λέγονται κάθετα αν $\langle x, y\rangle = 0$ και τότε γράφουμε: $x \perp y$.

Αν M είναι γραμμικός υπόχωρος του X τότε και ο $M^{\perp} = \{y \in X \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in M\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

– Παρατήρηση: Αν $x, y \in X$ με $\langle x, y\rangle = 0$ τότε: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Θεώρημα Πυθαγόρα)

• Θεώρημα: (Ορθογώνια Προβολή). Αν H είναι ένας χώρος Hilbert και M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H και $x \in H$ τότε υπάρχει μοναδικό $y \in M$ τέτοιο ώστε: $\|x-y\| = \mathrm{dist}(x, M) = \inf\{\|x-z\| : z \in M\}$. Αυτό το $y \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$ και λέγεται η προβολή του x στο M. Επιπλέον: $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

- Απόδειξη: Έστω $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}^{\infty}$ ακολουθία στο M με: $\|x - y_n\| \longrightarrow \delta = \inf\{\|x-z\| : z \in M\}$.

Τότε: $\|y_n - y_m\|^2$ [redacted] $+ \|2x - y_n - y_m\|^2 = \cancel{\|(x-y_n)} + \|(y_n - x) \cancel{+ (x-y_m)\|^2 + \|(y_n-x)-(x}$

$= \|(x-y_n) - (x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n) + (x-y_m)\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 \Rightarrow$

$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 + 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \le 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 + 4\delta^2$

$\xrightarrow{n,m \to \infty} 0$ και άρα η (y_n) είναι βασική και αφού τώρα ο X είναι χώρος Hilbert και ο M είναι κλειστός υπόχωρος έπεται ότι και ο M είναι χώρος Hilbert και άρα η $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και άρα $\exists\, y \in M : y_n \to y$. Τότε: $\|x-y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \delta$.

Μοναδικότητας: Έστω ότι υπάρχει και $y' \in M$ τέτοιο ώστε: $\|x - y'\| = \delta$ και τότε από κανόνα του παραλληλογράμμου: $\|y - y'\|^2 =$ [redacted]
$2\|x-y\|^2 + 2\|x-y'\|^2 - \|2x - y - y'\|^2 \le 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2$

Scanned with CamScanner

και άρα: $y = y'$.

Να αποδείξουμε τώρα ότι $x - P_M(x) \in M^{\perp}$. Έστω $z = x - P_M(x)$.

Τώρα: $\langle z, w \rangle = |\langle z, w \rangle| e^{i\theta}$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$. Τώρα έχουμε ότι:

$$\|z - te^{i\theta} w\|^2 = \|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - t\langle z, w\rangle e^{i\theta} - te^{i\theta}\langle w, z\rangle =$$
$$\|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}(\langle z, w\rangle e^{i\theta}) = \|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - 2t|\langle z, w\rangle|$$

Τώρα η συνάρτηση αυτή του t ελαχιστοποιείται στο $t = 0$ και άρα πρέπει η παράγωγος στο $t=0$ να μηδενίζεται. Η παράγωγος είναι: $2t\|w\|^2 - 2|\langle z, w\rangle|$ και στο $t=0$ είναι: $-2|\langle z, w\rangle|$ και άρα πρέπει: $|\langle z, w\rangle| = 0 \Rightarrow \langle z, w\rangle = 0$

- <u>Πόρισμα:</u> Αν X είναι χώρος Hilbert και M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος τότε κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά ως $x = x' + x''$ όπου: $x' \in M$ και $x'' \in M^{\perp}$.

- <u>Απόδειξη:</u> Έστω $x \in H$ και τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι αν θεωρήσουμε το $P_M(x)$ τότε: $x = \underset{\substack{\cap \\ M}}{P_M(x)} + \underset{\substack{\cap \\ M^{\perp}}}{(x - P_M(x))}$ από το προηγούμενο θεώρημα. Τώρα για την μοναδικότητα έχουμε ότι αν: $x = x' + x'' = y' + y''$ όπου $x', y' \in M$ και $x'', y'' \in M^{\perp}$ τότε: έχουμε ότι: $x' + x'' - y' - y'' = 0 \Rightarrow \|x' + x'' - y' - y''\| = 0$
$\Leftrightarrow \|\underset{\substack{\cap \\ M}}{(x' - y')} + \underset{\substack{\cap \\ M^{\perp}}}{(x'' - y'')}\|^2 = 0 \overset{\Pi\Theta}{\Leftrightarrow} \|x' - y'\|^2 + \|x'' - y''\|^2 = 0 \Leftrightarrow x' = y'$ και $x'' = y''$ και άρα έχουμε την μοναδικότητα.

- <u>Πόρισμα:</u> Αν H είναι ένας χώρος Hilbert και M είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H με $M \neq H$ τότε: $\exists x \in H \setminus \{0\}$ με $x \in M^{\perp}$.

- <u>Απόδειξη:</u> Αν $M \neq H$ τότε $\exists x \in M \setminus H$ και $x \neq 0$. Θέτουμε: $y = x - P_M(x) \in M^{\perp}$ και αφού: $x \notin M$ $y \neq 0$ και έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Γραμμικά Συναρτησοειδή:</u> Έστω H ένας χώρος Hilbert. Αν $a \in H$ τότε: $\varphi_a(x) = \langle x, a \rangle$, $x \in H$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι και φραγμένο μάλιστα γιατί: $|\varphi_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\|\,\|a\|$ από την Cauchy-Schwarz και άρα το φ_a είναι φραγμένο και $\|\varphi_a\| \leq \|a\|$. Επίσης έχουμε μάλιστα ότι: $\|\varphi_a\| = \|a\|$ γιατί: για $x = a$: $|\varphi_a(a)| = \|a\|^2 \leq \|\varphi_a\|\,\|a\|$
$\Rightarrow \|\varphi_a\| \geq \|a\|$ και άρα από τις 2 ανισότητες: $\|\varphi_a\| = \|a\|$. Μάλιστα αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση: $T: H \to H^*$ με $T(a) = \varphi_a$ είναι ισομετρί

Scanned with CamScanner

Μάλιστα έχουμε ότι η T είναι αντιγραμμική: δηλαδή: $\forall a,b \in H$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$:
$T(\lambda a + \mu b) = \bar{\lambda} T(a) + \bar{\mu} T(b)$ το οποίο ελέγχεται εύκολα.

• **Θεώρημα Riesz:** Έστω H ένας χώρος Hilbert και $\varphi \in H^*$. Τότε $\exists a \in H$ τέτοιο ώστε: $\varphi(x) = \langle x, a\rangle$, $\forall x \in H$.

- *Απόδειξη:* Θεωρούμε τον $\ker\varphi = \{x \in H : \varphi(x) = 0\}$ και έχουμε ότι αυτός είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Μάλιστα υποθέτουμε ότι είναι γνήσιος γιατί: αν $\ker\varphi = H$ τότε θα είχαμε ότι: $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in H$ και άρα μπορούμε να επιλέξουμε $a = 0$ στην περίπτωση αυτή. Τότε έχουμε από προηγούμενο Πόρισμα ότι υπάρχει $z \in H$ με $z \neq 0$ όπου: $z \in \ker\varphi^{\perp}$. Τότε όμως για $y \in H$: $\varphi(z\varphi(y) - \varphi(z)y) = 0$ και άρα: $z\varphi(y) - y\varphi(z) \in \ker\varphi$ και άρα: $\cancel{\langle z, z\varphi(y) - y\varphi(z)\rangle = 0 \Rightarrow \langle z, z\varphi(y)\rangle} - \langle z, y\varphi(z)\rangle = 0$
$\Rightarrow \cancel{\varphi(y)\|z\|^2 - \varphi(z)\langle z,y\rangle = 0 \Rightarrow \varphi(y)\|z\|^2 = \varphi(z)\langle z,y\rangle \Rightarrow \varphi(y) = \langle y, \frac{\varphi(z)}{\|z\|^2} z\rangle}$

$\langle z\varphi(y) - y\varphi(z), z\rangle = 0 \Rightarrow \varphi(y)\|z\|^2 = \langle y, z\rangle \varphi(z)$, $\forall y \in H \Rightarrow \varphi(y) = \langle y, \underbrace{\frac{\overline{\varphi(z)}}{\|z\|^2} z}_{a}\rangle$
$\forall y \in H$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα για την μοναδικότητα: παρατηρούμε ότι αν υπάρχουν $z_1, z_2 \in H$ τ.ω.:
$\varphi(y) = \langle y, z_1\rangle = \langle y, z_2\rangle$, $\forall y \in H$ τότε: $\forall y \in H$: $\langle y, z_1 - z_2\rangle = 0 = \varphi(y) - \varphi(y)$
και άρα $z_1 = z_2$ επειδή το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο σε όλα είναι το μηδενικό στοιχείο 0.

Scanned with CamScanner

(Απόδειξη Cauchy-Schwartz: σημειώσεις)

• Μάθημα 6ο: Αρμονική Ανάλυση: Σκαρλογιάννης.

- Έστω X γρ. χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα υποσύνολο $\{e_i : i\in I\}\subseteq X$ λέγεται ορθοκανονικό αν: $\langle e_i,e_j\rangle = 0,\ \forall i\neq j$ και $\langle e_i,e_i\rangle = 1$ ($\|e_i\|=1$) $\forall i\in I$.

• Παρατήρηση: Κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο: Πράγματι, αν $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ και $e_1,\dots,e_n\in X$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ τότε έχουμε ότι: $\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle e_i,e_j\rangle = \lambda_j\|e_j\|^2 = \lambda_j = 0,\ \forall j=1,\dots,n$ και άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

- Ορισμός: Ορθοκανονική Βάση: Ένα ορθοκανονικό σύνολο λέγεται ορθοκανονική βάση αν:
[redacted] $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i\in I\}$

• Πρόταση: Κάθε (διαχωρίσιμος) χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση. (αριθμήσιμη)

▸ Απόδειξη: Επειδή ο H είναι διαχωρίσιμος έπεται ότι κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι αριθμήσιμο γιατί: αν $\{e_i : i\in I\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο τότε: $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2},\ \forall i\neq j\in I$. Σε ένα διαχωρίσιμο όμως χώρο δεν μπορούμε να έχουμε υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία με $\|e_i-e_j\|\geq\delta$ για κάποιο $\delta>0$. Θεωρούμε τώρα την κλάση των ορθοκανονικών υποσυνόλων του H [redacted] με την διάταξη του υποσυνόλου. Κάθε αλυσίδα ως προς αυτή έχει άνω φράγμα και άρα από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο. Αυτό θα είναι αριθμήσιμο και αποτελεί βάση γιατί: αν $H\neq\overline{\operatorname{span}}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ τότε έχουμε ότι υπάρχει $z\in H$, $z\neq 0$ και $z\notin\overline{\operatorname{span}}\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ και άρα έχουμε: $\exists\, z'\perp \overline{\operatorname{span}}\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ και $z'\neq 0$ και άρα το $\{$[redacted]$z\}\cup\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο και είναι μεγαλύτερο από το μεγιστικό $\{e_n :$ $n\in\mathbb{N}$ [redacted]$\}$ και άρα άτοπο και έχουμε ότι επομένως: $\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.

• Λήμμα: Αν X είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{e_i:i\in I\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο τότε: $\forall x\in X$: $d(x,\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_n\}) = \|x - \sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle e_i\|$

• Απόδειξη: Αρχικά έχουμε ότι: (*) $\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i\|^2 = \|x-\sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle e_i\|^2 + \|\sum_{i=1}^n(\langle x,e_i\rangle-\lambda_i)e_i\|^2$

Επειδή τώρα: $\langle x - \cancel{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i}$ [redacted] $\cancel{x-}\sum_{i=1}^n\lambda_i e_i\rangle$ $\langle x-\sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle e_i, \sum_{i=1}^n(\langle x,e_i\rangle-\lambda_i)e_i\rangle$

$\langle x, \sum_{i=1}^n(\langle x,e_i\rangle-\lambda_i)e_i\rangle$ [redacted] $- \sum_{i,j=1}^n\langle\langle x,e_i\rangle e_i, (\langle x,e_j\rangle-\lambda_j)e_j\rangle$

Scanned with CamScanner

$= \| \sum_{i=\min\{n,m\}}^{\max\{n,m\}} \langle x, e_i\rangle e_i \|^2 \underset{\Pi.\Theta}{=} \sum_{i=\min\{n,m\}}^{\max\{n,m\}} |\langle x,e_i\rangle|^2 \|e_i\|^2 = \sum_{i=\min\{n,m\}}^{\max\{n,m\}} |\langle x,e_i\rangle|^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ και άρα η

$(s_n)_{n\geq 1}$ είναι βασική ακολουθία και άρα συγκλίνει αφού ο H είναι χώρος Hilbert.

Έστω τώρα: $y = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$. Θα αποδείξουμε ότι: $y=x$ και έτσι θα έχουμε το ζητούμενο.

Έχουμε τώρα: $\langle x-y, e_k\rangle = \langle x,e_k\rangle - \langle y,e_k\rangle = \langle x,e_k\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle s_n(x),e_k\rangle$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\langle x,e_k\rangle - \langle s_n(x),e_k\rangle\right)$ και τώρα παρατηρούμε ότι: $\langle s_n(x),e_k\rangle = \langle x,e_k\rangle$, για $n\geq k$

και άρα $\langle x-y,e_k\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\langle x,e_k\rangle - \langle x,e_k\rangle\right) = 0$ και άρα από την υπόθεση έχουμε ότι:

αφού: $\langle x-y,e_k\rangle = 0, \ \forall k\in\mathbb{N} \Longrightarrow x=y$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

3 ⟹ 4.): Στην απόδειξη της ανισότητας Bessel έχουμε ότι:

$\|x\|^2 = \|x-s_n(x)\|^2 + \|s_n(x)\|^2 = \|x-s_n(x)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x,e_i\rangle|^2 \longrightarrow 0 + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x,e_i\rangle|^2$

και άρα: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2$ από την υπόθεση (3). και άρα έχουμε το ζητούμενο.

4 ⟹ 1.): Έστω $x\in H$ και τότε έχουμε από την ίδια ισότητα: $\|x-s_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|s_n(x)\|^2$

$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x,e_i\rangle|^2 \longrightarrow \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0$ από Parseval και άρα έχουμε ότι αφού

$s_n(x)\in \text{span}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}, \ \forall n\in\mathbb{N}$ έπεται ότι: $x\in\overline{\text{span}}\{e_i:i\in\mathbb{N}\}$ και άρα: $H = \overline{\text{span}}\{e_i:i\in\mathbb{N}\}$

και άρα έχουμε ότι το $\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση.

Scanned with CamScanner

$= \sum_{i=1}^{n} (\langle x,e_i\rangle - \lambda_i)$ [redacted] $\langle x,e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x,e_i\rangle \overline{(\langle x,e_i\rangle - \lambda_i)} = 0$ και άρα από Π.Θ έχουμε την ⊛ και άρα από την ⊛: $\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\|^2 \geq \|x - \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\|^2_{\in span\{e_1,\dots,e_n\}}$

- <u>Παρατήρηση</u> (<u>Ανισότητα Bessel</u>): Σε είναι γραμμικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο αν $\{e_i : i\in I\}$ είναι (αριθμήσιμο) ορθοκανονικό σύνολο τότε: $\sum_{i\in I} |\langle x,e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $I=\mathbb{N}$ και $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ ~~και από το λήμμα~~ ~~αφού~~ και τότε έχουμε ότι $\langle x - S_n(x), S_n(x)\rangle = 0$ αφού: [redacted] $\langle x - S_n(x), S_n(x)\rangle = \langle x - \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\rangle$

$= \langle x, \sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\rangle$

$= \sum_{j=1}^{n}\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle x,e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle e_i,e_j\rangle$

$= \sum_{j=1}^{n}\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle x,e_j\rangle - \sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle\overline{\langle x,e_j\rangle}\|e_j\|^2 = 0$ και άρα τώρα

από το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2 \geq \|S_n(x)\|^2 =$

$\|\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\|^2 \underset{\Pi.\Theta}{=} \sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και άρα

παίρνοντας όριο $n\to+\infty$: $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2$

- <u>Θεώρημα</u>: Έστω H ένας χώρος Hilbert και $\{e_i : i\in$ [redacted] $\mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο ορθοκανονικό σύνολο.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Το $\{e_i : i\in I\}$ είναι ορθοκανονική βάση
2. Αν $x\in H$ τότε: $\langle x,e_i\rangle = 0, \forall i\in I \Rightarrow x=0$
3. Αν για $x\in H$ ορίζουμε $\forall n\in\mathbb{N}$: $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$, τότε: $S_n(x)\longrightarrow x$
4. Ισχύει η ταυτότητα Parseval: $\|x\|^2 = \sum_{i\in \mathbb{N}}|\langle x,e_i\rangle|^2$

- <u>Απόδειξη</u>: $\underline{1}\Rightarrow\underline{2}$.) Αν το $(e_i)_{i\in}$ [redacted] $_{\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση τότε: $H = \overline{span}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ τότε αν πάρουμε $x\in H = \overline{span}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ τέτοιο ώστε: $\langle x,e_i\rangle = 0$, $\forall i\in\mathbb{N}$ τότε έχουμε ότι: υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\geq1}$ από την $span\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε: $y_n\to x$. Τώρα όμως έχουμε ότι αφού η $\langle , \rangle$ είναι συνεχής: $\langle x,y_n\rangle \longrightarrow \langle x,x\rangle$ και αφού τώρα $\forall n\in\mathbb{N}$: $\langle x,y_n\rangle = 0$ γιατί $\forall n\in\mathbb{N}$: $y_n\in span\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ και $\langle x,e_i\rangle = 0$ έπεται ότι τελικά: $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x=0$

$\underline{2}\Rightarrow\underline{3}$.) Έστω $x\in H$ και ορίζουμε $\forall n\in\mathbb{N}$: $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ και έχουμε αρχικά ότι από Bessel: $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$ και άρα: $\|S_n(x) - S_m(x)\|^2 =$

Scanned with CamScanner

Συζυγείς Τελεστές: Μάθημα 7ο: Σκαρλόγιαννης:

Θεώρημα: Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T: H \to H$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Τότε: $\forall y \in H: \exists! T^*(y) \in H$ τέτοιο ώστε: $\forall x \in H: \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$. Το T^* ορίζει φραγμένο, γραμμικό τελεστή που ονομάζεται συζυγής γραμμικός τελεστής του T. Επιπλέον έχουμε ότι: $(T^*)^* = T$ και $\|T^*\| = \|T\|$.

Απόδειξη: Έστω $y \in H$ και τότε ορίζουμε το φραγμένο και γραμμικό συναρτησοειδές: $f: H \to \mathbb{K}$ με $f_y(x) =$ [redacted] $\langle T(x), y \rangle$, $\forall x \in H$ και αυτό παρατηρούμε ότι είναι πραγματι[redacted] γραμμικό και επίσης είναι και φραγμένο γιατί: $\forall x \in H: |f_y(x)| = |\langle T(x), y \rangle| \overset{C-S}{\leq} \|T(x)\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\| = K \|x\|$ όπου $K = \|T\| \|y\| < \infty$ αφού ο T είναι φραγμένος. Επομένως τώρα από το θεώρημα Riesz έχουμε ότι: $\exists! z_y \in H: f_y(x) = \langle x, z_y \rangle = \langle T(x), y \rangle$, $\forall x \in H$ και άρα αν ορίσουμε $T^*: H \to H$ με $T^*(y) = z_y$ τότε έχουμε ότι: $\langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$ $\forall x, y \in H$ και ο T^* είναι καλά ορισμένος.

Scanned with CamScanner

Τώρα παρατηρούμε ότι ο T^* είναι και γραμμικός γιατί αν πάρουμε $y_1, y_2 \in H$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ τότε έχουμε ότι θα αποδείξουμε ότι: $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2)$ και άρα αφού $\forall x \in H$: $\langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle = \langle T(x), \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \langle T(x), \lambda_1 y_1\rangle$ $+ \langle T(x), \lambda_2 y_2\rangle = \bar{\lambda}_1 \langle T(x), y_1\rangle + \bar{\lambda}_2 \langle T(x), y_2\rangle = \bar{\lambda}_1 \langle x, T^*(y_1)\rangle + \bar{\lambda}_2 \langle x, T^*(y_2)\rangle$

αφού η διαφορά είναι κάθετη σε όλο τον H

$= \langle x, \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2)\rangle$ και άρα από μοναδικότητα: $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2)$

Τώρα παρατηρούμε ότι ο T^* είναι και φραγμένος: γιατί για $y \in H$: $\|T^*(y)\|^2 =$ $\langle T^*(y), T^*(y)\rangle = \langle T(T^*(y)), y\rangle \overset{C\text{-}S}{\le} \|T(T^*(y))\| \|y\| \le \|T\| \|T^*(y)\| \|y\| \Rightarrow$ $\|T^*(y)\| \le \|T\| \|y\|$ και άρα ο T^* είναι φραγμένος με: $\|T^*\| \le \|T\|$. Τώρα για το ότι: $(T^*)^* = T$ παρατηρούμε ότι: $\forall x, y \in H$: $\langle T^*(x), y\rangle = \overline{\langle y, T^*(x)\rangle} = \overline{\langle T(y), x\rangle}$ $= \langle x, T(y)\rangle$ και άρα: $(T^*)^*(y) = T(y)$, $\forall y \in H$. Επομένως τώρα απ' αυτό έπεται ότι και: $\|(T^*)^*\| = \|T\| \le \|T^*\|$ και άρα από τις 2 ανισότητες: $\|T\| = \|T^*\|$.

- Μεγιστική Συνάρτηση Hardy-Littlewood και Θεώρημα Διαφόρισης του Lebesgue

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη και $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Αν η f είναι συνεχής στο $x \in (a,b$ [redacted] τότε η F είναι διαφορίσιμη στο x και $F'(x) = f(x)$ και άρα: $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} f(y)\,dy = f(x)$ για $x \in (a,b)$ σημείο συνέχειας της f. Όμοια έχουμε ότι: $\lim_{h \to 0} \int_{x-h}^{x} f(y)\,dy = f(x)$ για $x \in (a,b)$ σημείο συνέχειας της f.

Τώρα έχουμε ότι: $\frac{1}{\lambda(I\,\text{[redacted]}} \int_I f(y)\,dy \to f(x)$ όταν $\lambda(I) \to 0$ (*) όπου I είναι ανοιχτό διάστημα, $x \in I$, και λ είναι το μέτρο Lebesgue του I, ισχύει σχεδόν παντού για Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

▸ Ερώτημα: Ισχύει η (*) [redacted] σχεδόν παντού για $f \in L^1(\mathbb{R})$; ή γενικότερα για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ή για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Η απάντηση είναι ναι (Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue)

-Απόδειξη της (*) για x σημείο συνέχειας της f: Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και x σημείο συνέχειας της f τότε δοθέντος $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$: $\forall y$: $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Τώρα αν I είναι ανοιχτό διάστημα με $x \in I$ και $\lambda(I) < \delta$ τότε: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall y \in I$ αφού: $|x-y| \le \lambda(I) < \delta$

Scanned with CamScanner

και άρα: $\left| \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f(y)\,dy - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f(y)\,dy - \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f(x)\,dy \right| =$

$\left| \frac{1}{\lambda(I)} \left(\int_I (f(y)-f(x))\,dy \right) \right| = \frac{1}{\lambda(I)} \left| \int_I (f(y)-f(x))\,dy \right| \leq \frac{1}{\lambda(I)} \int_I |f(y)-f(x)|\,dy$

$\leq \frac{\varepsilon \lambda(I)}{\lambda(I)} = \varepsilon$. Ίδια απόδειξη γενικεύεται στον $\mathbb{R}^n$ με I ανοιχτές μπάλες περιοχών του x

- <u>Ορισμός:</u> Για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε: $f^*(x) = \sup_{\substack{B: \text{ ανοιχτή μπάλα} \\ x \in B}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y)|\,dy$ η <u>μη κεντραρισμένη μεγιστική συνάρτηση της f</u> και $M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_B |f(y)|\,d\lambda_n(y)$ την <u>κεντραρισμένη μεγιστική συνάρτηση της f.</u>

- <u>Παρατήρηση:</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η f^* είναι μετρήσιμη. Συγκεκριμένα για κάθε a[redacted] $\in \mathbb{R}$ το: $(f^*)^{-1}((a,+\infty))$ είναι ανοιχτό.

- Πράγματι έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $x \in \{y \in \mathbb{R}^n : f^*(y) > a\} = (f^*)^{-1}((a,+\infty))$

$\Rightarrow f^*(x) > a$ και τότε έχουμε ότι: υπάρχει ανοιχτή μπάλα B_x με $x \in B_x$ και $\frac{1}{\lambda_n(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\,d\lambda(y) > a$ και άρα τότε για κάθε $z \in B_x$: $f^*(z) \geq \frac{1}{\lambda_n(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\,d\lambda(y) > a$

$\Rightarrow$ και άρα: $x \in B_x \subseteq E_a = (f^*)^{-1}((a,+\infty))$ και άρα έχουμε ότι είναι ανοιχτό.

- <u>Παράδειγμα:</u> Έστω $n=1$ και έστω $f(x) = 1_{[a,b]}(x)$ ($a<b$ στο $\mathbb{R}$). Τότε:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{b-x}, & x \leq a \\ \frac{b-a}{x-a}, & x \geq b \\ 1, & a<x<b \end{cases} \quad \text{και} \quad Mf(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2(b-x)}, & x \leq a \\ 1, & a<x<b \\ \frac{b-a}{2(x-a)}, & x \geq b \end{cases}$$

- $f^*(x) = \sup_{\substack{I \ni x \\ I: \text{ ar. διάστημα}}} \frac{1}{\lambda(I)} \underbrace{\int_I 1_{[a,b]}(y)\,dy}_{\lambda(I \cap [a,b])} = \sup_{\substack{I \ni x \\ I: \text{ ar. διάστημα}}} \frac{\lambda(I \cap [a,b])}{\lambda(I)}$ και τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις και βγάζουμε συμπεράσματα.

Scanned with CamScanner

- **Ορισμός:** Ένας ~~γραμμικός~~ τελεστής από έναν υπόχωρο του χώρου των μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν χώρο μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$ στις μετρήσιμες συναρτήσεις ενός χώρου μέτρου $(Y,\mathcal{B},\nu)$ λέγεται υπογραμμικός: αν: $|T(cf)| = c\,|T(f)|,\ \forall c \geq 0$ και $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|,\ \forall f,g$ στο πεδίο ορισμού του T.

CS Scanned with CamScanner

- Μάθημα 8ο: Αρμονική Ανάλυση: Σκαρμόγιαννης:

- <u>Ορισμός:</u> Ένας [redacted] τελεστής απο έναν υπόχωρο του χώρου των μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ στις μετρήσιμες συναρτήσεις ενός χώρου μέτρου $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ λέγεται <u>υπογραμμικός:</u> αν: $|T(cf)| = c|T(f)|$, $\forall c \geq 0$ και $|T(f+g)|$ [redacted] $\leq |T(f)| + |T(g)|$, $\forall f, g$ πο πεδίο ορισμού του T.

- Ένας υπογραμμικός τελεστής καλείται <u>ισχυρού τύπου (p,q)</u> αν ορίζεται πον $L^p(\mu) \longrightarrow L^q($[redacted]$)$ και $\|T(f)\|_q \leq C\|f\|_p$ όπου q [redacted] όχι αναγκαστικά συζυγής εκθέτης του p, και καλείται <u>ασθενούς τύπου (p,q)</u> αν: $\mu(\{y \in Y : |Tf(y)| > t\}) \leq C\left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^q$, $\forall t \geq 0$

- <u>Παρατήρηση:</u> Ισχυρού Τύπου $\longrightarrow$ Ασθενούς Τύπου: Πράγματι αν έχουμε ότι: $\|T(f)\|_q \leq C\|f\|_p$, $\forall f \in L^p(\mu)$ δηλαδή είναι ισχυρού τύπου (p,q), όπου $C > 0$ σταθερά. Τότε όμως έχουμε ότι: $\forall t$ [redacted] $\mu(\{y \in Y : |Tf(y)| > t\}) \leq \frac{\|Tf\|_q^q}{t^q}$ (Markov) $\leq C^q\left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^q$ και άρα έχουμε το ζητούμενο

- <u>Θεώρημα:</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η f^* ικανοποιεί ασθενούς τύπου $(1,1)$ ανισότητα και συγκεκριμένα: $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |\underbrace{f^*(x)}_{f^*(x)}| > t\}) \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{t}$, $\forall t > 0$.

- <u>Πόρισμα:</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε: $f^* < +\infty$ λ_n-σχεδόν παντού:

- Πράγματι: $A = \{x \in \mathbb{R}^n :$ [redacted] $f^*(x) = +\infty\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\}$ και άρα: $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) = +\infty\}) \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\})$, $\forall m \in \mathbb{N}$ και άρα έχουμε ότι: αφού απο Θεώρημα: $\forall m \in \mathbb{N}$: $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) \overset{=+\infty}{[redacted]}\}) \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f^*(x)| > m\}) \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{m}$ έπεται ότι: για $m \to \infty$

$\lim_{m \to \infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\}) = 0$ και αφού τώρα η ακολουθία συνόλων: $A_m = \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων έπεται απο την συνέχεια του μέτρου λ_n ότι: $\lim_{m \to \infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\}) =$ [redacted] $\lim_{m \to \infty} \lambda_n(A_m) = \lambda_n\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lambda_n(A) = 0$

[redacted] έχουμε $\lambda_n(A) = 0$ και άρα $f^* < \infty$ [redacted] λ_n-σχεδόν παντού. ($\mu = \lambda_n$ παραπάνω)

Scanned with CamScanner

$B_{x_{i_j}}$: ξένες

$= \frac{3^n}{t}\int_{\bigcup_{j=1}^{m} B_{x_{i_j}}} |f|\,d\lambda_n \le \frac{3^n}{t}\|f\|_1$ και άρα τώρα από την εσωτερική κανονικότητα του λ_n: $\lambda_n(A_t) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subseteq A_t,\ K: \text{συμπαγές}\} \le \frac{3^n}{t}\|f\|_1$.

- **Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue:** Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε: $\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B f(y)\,d\lambda_n(y) \xrightarrow[x\in B]{\lambda_n(B)\to 0} f(x)$ (*) λ_n-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}^n$.
B: ανοιχτή μπάλα

- **Απόδειξη:** Έχουμε δει ότι για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ η (*) ισχύει για κάθε x σημείο συνέχειας της f. Θα αποδείξουμε ότι $\forall t>0: \lambda_n(E_t) = 0$ όπου $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0\\ B: \text{ανοιχτή μπάλα}}} \left|\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B f\,d\lambda_n - f(x)\right| > t\}$ και τότε έχουμε ότι: $\lambda_n\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{1/m}\right) = 0$ και για $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{1/m}$: $\limsup_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0}} \left|\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B f\,d\lambda_n - f(x)\right| = 0$. Έστω $t>0$ και $\varepsilon>0$:

Τότε έχουμε ότι από θεώρημα υπάρχει $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$: $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon t}{2(3^n+1)}$

και τότε: $\left|\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B f\,d\lambda_n - f(x)\right| \le \underbrace{\left|\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B g\,d\lambda_n - g(x)\right|}_{A} + \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\Gamma} + \underbrace{\frac{1}{\lambda_n(B)}\left|\int_B (f-g)\,d\lambda_n\right|}_{B}$

$\cancel{\le A + |f(x)-g(x)| + (f-g)^*(x)}$ και άρα: αφού: $\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B |f-g|\,d\lambda_n \ge B$

$\limsup_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0}} \left|\frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B f\,d\lambda_n - f(x)\right| \le 0 + |f(x)-g(x)| + (f-g)^*(x)$ και άρα έχουμε ότι:

$E_t \subseteq \{x\in\mathbb{R}^n : (f-g)^*(x) > t/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)-g(x)| > t/2\}$ γιατί διαφορετικά: $\limsup \le t$ και άρα: $\lambda_n(E_t)$

$\le \lambda_n(\{x\in\mathbb{R}^n : (f-g)^*(x) > t/2\}) + \lambda_n(\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)-g(x)| > t/2\}) \le \frac{\|f-g\|_1}{t/2} + \frac{3^n}{t/2}\|f-g\|_1 < \varepsilon$

(Markov) (Θεώρημα (1,1))

και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν έπεται ότι: $\lambda_n(E_t) = 0,\ \forall t>0$

αφού και το $t>0$ ήταν τυχόν.

- **Παρατήρηση:** Για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι: $|f(x)| \le \overset{=f^*(x)}{|f^*(x)|}$ λ_n-σχεδόν κάθε $x\in\mathbb{R}^n$

- Απόδειξη: Από θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue για $|f|$:

$$|f(x)| = \lim_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B |f|\,d\lambda_n \le \sup_{x\in B} \frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B |f|\,d\lambda_n = f^*(x)$$ λ_n-σχεδόν παντού ■

CS Scanned with CamScanner

- <u>Παρατήρηση:</u> Για $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ [redacted] ο τελεστής $L^1(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L(\mathbb{R}^n)$ (μετρήσιμες) $f\longmapsto f^*$ είναι υπογραμμικός τελεστής

- <u>Λήμμα Κάλυψης του Vitaly:</u>

Αν $B_1,\dots,B_N$ είναι μπάλες τότε υπάρχουν ξένες ανά 2 μπάλες $B_{i_1},\dots,B_{i_m}$ απ' αυτές τέτοιες ώστε: $\bigcup\limits_{j=1}^{N} B_j \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m}\tilde{B}_{i_j}$ όπου $\tilde{B}_{i_j}$ μπάλα με το ίδιο κέντρο με την B_{i_j} και τριπλάσια ακτίνα. Άρα: $\lambda_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i\right)\leq 3^n\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_n(B_{i_j})$

- <u>Απόδειξη:</u> Έστω $\mathcal{B}_1=\{B_1,\dots,B_N\}$. Διαλέγουμε i_1 ώστε η B_{i_1} να έχει μέγιστη ακτίνα. Τώρα έστω: $\mathcal{B}_2=\{B\in\mathcal{B}_1 \mid B\cap B_{i_1}=\emptyset\}$ και διαλέγουμε B_{i_2} ώστε η ακτίνα της να είναι μέγιστη στην $\mathcal{B}_2$. Επαγωγικά ορίζουμε $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_k$ και $B_{i_1},\dots,B_{i_k}$ και $\mathcal{B}_{k+1}=\{B\in\mathcal{B}_k \mid B\cap B_{i_k}=\emptyset\}$ και $B_{i_{k+1}}$ να είναι μια μπάλα στην $\mathcal{B}_{k+1}$ με την μέγιστη ακτίνα. Υπάρχει $m\leq N$ με $\mathcal{B}_{m+1}=\emptyset$.
Έστω τώρα $\tilde{B}_{i_k}$ η μπάλα με το ίδιο κέντρο και τριπλάσια ακτίνα της B_{i_k}.

<u>Ισχυρισμός:</u> $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{m}\tilde{B}_{i_j}$ και $B_{i_j}\cap B_{i_{j'}}=\emptyset,\ \forall j\neq j'$

- Από την κατασκευή έχουμε αρχικά ότι: καμία από τις B_{i_j} δεν τέμνει τις προηγούμενες. Κάθε τώρα B_i περιέχεται στο $\mathcal{B}_1$ και δεν περιέχεται στο $\mathcal{B}_{m+1}$ και άρα υπάρχει $k\in\{1,2,\dots,m\}$ τ.ω: $B_i\in\mathcal{B}_k$ και $B_i\notin\mathcal{B}_{k+1}$ και άρα: $B_i\cap B_{i_k}\neq\emptyset$ και αφού $B_i\in\mathcal{B}_k$ έπεται ότι ακτίνα$(B_i)\leq$ ακτίνα(B_{i_k}) και άρα: $B_i\subseteq\tilde{B}_{i_k}$ από τριγωνική ανισότητα.

Τέλος: $\lambda_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i\right)\leq\lambda_n\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m}\tilde{B}_{i_j}\right)\leq\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_n(\tilde{B}_{i_j})=3^n\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_n(B_{i_j})$

- <u>Απόδειξη Θεωρήματος:</u> Έστω $t>0$ και K συμπαγές υποσύνολο του $A_t=\{x\in\mathbb{R}^n : f^*(x)>t\}$. Τώρα παρατηρούμε ότι: $\forall x\in A_t$: $\exists$ ανοιχτή μπάλα B_x τέτοια ώστε: $x\in B_x$ και $\dfrac{1}{\lambda_n(B_x)}\displaystyle\int_{B_x}|f(y)|\,d\lambda_n(y)>t \iff \dfrac{1}{t}\int_{B_x}|f(y)|\,d\lambda_n(y)>\lambda_n(B_x)$. Τώρα η $\{B_x : x\in K\}$ αποτελούν ανοιχτή κάλυψη του K και αφού το K είναι συμπαγές έπεται ότι υπάρχει πεπερασμένη ανοιχτή υποκάλυψη $\{B_{x_1},\dots,B_{x_N}\}$. Τώρα από το λήμμα έχουμε ότι υπάρχουν $i_1,\dots,i_m\in\{1,\dots,N\}$ τέτοιες ώστε οι μπάλες $B_{x_{i_j}}$ να είναι ξένες μεταξύ τους και: $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{x_i}\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{m}\tilde{B}_{x_{i_j}}$ και άρα: $K\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{m}\tilde{B}_{x_{i_j}}$. Τότε όμως: $\lambda_n(K)\leq\lambda_n\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m}\tilde{B}_{x_{i_j}}\right)$

$$=\sum\lambda_n(\tilde{B}_{x_{i_j}})=3^n\sum_{j=1}^{m}\lambda_n(B_{x_{i_j}})\leq\frac{3^n}{t}\sum_{j=1}^{m}\int|f|\,d\lambda_n$$

Scanned with CamScanner

- Μάθημα 9ο: Αρμονική Ανάλυση: Σπαραμόρφωσης

▸ <u>Ορισμός</u>: Μια μετρήσιμη συνάρτηση f του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>τοπικά ολοκληρώσιμη</u> αν $\forall x \in \mathbb{R}^n : \exists \delta_x > 0 : f \cdot 1_{B(x,\delta_x)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Αυτό είναι ισοδύναμο με $f \cdot 1_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

Οι τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συμβολίζονται με $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

- <u>Θεώρημα</u>: (Παραγώγισης του Lebesgue): Για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι: $\lim\limits_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B: \text{ανοιχτή μπάλα}}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y)| \, d\lambda_n$ $= f(x)$ λ_n-σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$.

▸ <u>Απόδειξη</u>: Έστω $m \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε την $f \cdot 1_{B(0,m)}$ για την δοσμένη $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
Τώρα παρατηρούμε ότι $B(0,m)$ περιέχεται σε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αφού:
$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ έπεται ότι: $f \cdot 1_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ για κάθε K συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$ και άρα έχουμε ότι:
και $f \cdot 1_{B(0,m)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ($B(0,m) \subseteq \overline{B}(0,m)$ = κλειστό και φραγμένο = συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$).
Εφαρμόζουμε το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για την $f \cdot 1_{B(0,m)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$
και έχουμε ότι: $\frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B$ [redacted] $\cdot 1_{B(0,m)} \, d\lambda_n \xrightarrow[\substack{x\in B \\ = \text{ανοιχτή μπάλα}}]{\lambda_n(B)\to 0} f(x) 1_{B(0,m)}(x)$ σε ένα σύνολο E_m όπου:
$\lambda(E_m^c) = 0$. Για $x \in B(0,m)$ οι μέσοι όροι: $\frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \cdot 1_{B(0,m)} \, d\lambda_n = \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_{B \cap B(0,m) = B} f \, d\lambda_n$
για B με $\lambda(B)$ αρκετά μικρό ώστε: $B(0,m) \supseteq B$.
Έπεται ότι για $x \in B(0,m) \cap E_m$: $\lim\limits_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \, d\lambda = f(x)$ και $\lambda(B(0,m) \setminus E_m) = 0$

και άρα για $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} (B(0,m) \cap E_m)$ έχουμε ότι: $\lim\limits_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \, d\lambda = f(x)$ και:
$\lambda(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} (B(0,m) \cap E_m)) \leq \lambda(\mathbb{R}^n \setminus B(0,m) \cap E_m) = 0$ και άρα η ⊛ ισχύει λ_n-σχεδόν παντού.

▸ <u>Ορισμός</u>: Για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ το <u>σύνολο Lebesgue</u> ($Leb(f)$) της f είναι τα $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει: $\lim\limits_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B: \text{ανοιχτή μπάλα}}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B$ [redacted] $|f(y) - f(x)| \, d\lambda_n(y) = 0$

Scanned with CamScanner

▸ **Θεώρημα:** Έστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Τότε το σύνολο Lebesgue της f ικανοποιεί $\lambda(\mathbb{R}^n \setminus Leb(f)) = 0$.

- **Απόδειξη:** Έστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, και από το Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue για την $f - r\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ (r: ρητός) η οποία είναι $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B:\text{ ανοικτή}}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y) - r|\, d\lambda_n = |f(x) - r|$$ για x σε ένα σύνολο E_r όπου: $\lambda(E_r^c) = 0$. Έστω $E = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}} E_r$ και τότε: $\lambda(E^c) = 0$ και έστω τώρα: $x \in E$ και έστω και $\varepsilon > 0$: και έστω τώρα και $r \in \mathbb{Q}$: $|f(x) - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ και τότε $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y) - f(x)|\,dy \le \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y) - r|\,dy + \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(x) - r|\,dy$

$< \frac{\varepsilon}{[redacted]} + 2|f(x) - r| < \frac{\varepsilon}{[redacted]} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 \ldots$ για $\lambda(B)$ αρκετά μικρό

είναι: $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y) - r|\,dy < |f(x) - r| + \varepsilon$

▸ **Ορισμός:** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο. Ένα $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>σημείο πυκνότητας</u> του E

αν: $$\lim_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0}} \frac{\lambda_n(E\cap B)}{\lambda_n(B)} = [redacted] 1.$$

~~- Απόδειξη: Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για $f = \mathbb{1}_E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$~~

~~$\lim_{x\in B}$~~

▸ **Θεώρημα:** Αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) > 0$ τότε σχεδόν κάθε σημείο του E είναι σημείο πυκνότητας του E και σχεδόν κάθε σημείο του E^c δεν είναι σημείο πυκνότητας του E. Μάλιστα: $\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{\lambda_n(B\cap E)}{\lambda_n(B)} = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in E^c$.

- **Απόδειξη:** Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ όπου: $f = \mathbb{1}_E$:

$$\lim_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B:\text{ ανοικτή}}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B \mathbb{1}_E\, d\lambda_n = \lim_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B:\text{ ανοικτή}}} \frac{\lambda_n(B\cap E)}{\lambda_n(B)} = \mathbb{1}_E(x) = 1$$ για x σε ένα σύνολο A

με $\lambda_n(A^c) = 0$. Για $x \in E \cap A$: $$\lim_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B:\text{ ανοικτή}}} \frac{\lambda_n(B\cap E)}{\lambda_n(B)} = 1$$ και όμοια για $x \in E^c \cap A$:

$$\lim_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B:\text{ ανοικτή}}} \frac{\lambda_n(B\cap E^c)}{\lambda_n(B)} = 0$$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. ($\lambda(E \setminus E\cap A) = \lambda(E\setminus A) \le \lambda(A^c) = 0$ $\Rightarrow \lambda(E\setminus E\cap A) = 0$)

CS Scanned with CamScanner

▶ **Θεώρημα:** Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ τότε η $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ είναι λ-σχεδόν παντού διαφορίσιμη και $F'(x)=f(x)$ λ-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

- **Απόδειξη:** $\cancel{\left|\frac{1}{h}\int\right|}$ $\cancel{\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))\right|}$ Παρατηρούμε ότι: $\forall a,h>0$:

$$\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}f(y)\,dy-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x\text{[redacted]}}^{x\text{[redacted]}-a}f(y)\,dy+\frac{1}{h}\int_{x-a}^{x+h}f(y)\,dy-f(x)\right|$$

$$=\left|\frac{h+a}{h}\cdot\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h}f(y)\,dy+\frac{1}{h}\int_{x\text{[redacted]}}^{x-a}f(y)\,dy-f(x)\right| \le \cancel{\left|\frac{1}{h\text{[redacted]}+a}\int_{x-a}^{x+h}f(y)\,dy\right|+\left|\frac{a}{h}\int_{x-a}^{x}f(y)\,dy\right|}$$

$$\left(\frac{h+a}{h}=1+\frac{a}{h}\right)\quad \left|\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h}f(y)\,dy-f(x)\right|+\frac{a}{h}\frac{1}{h+a}\left|\int_{x-a}^{x+h}f(y)\,dy\right|+\frac{1}{h}\left|\int_{x-a}^{x}f(y)\,dy\right|$$

(για να εφαρμόσουμε το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue θέλουμε το x να βρίσκεται στο εσωτερικό της μπάλας $(x-a,x+h)$). Τώρα όπως στο και από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue σχεδόν $\forall x\in\mathbb{R}$: $\exists\delta_x>0$: τ.ω αν $h,a>0$ και $h+a<\delta_x$ τότε: $\left|\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h}f(y)\,dy-f(x)\right|<\varepsilon$. Τώρα αν πάρουμε: $0<h<\delta_x$ και $0<a<\delta_x-h$ τότε έχουμε ότι: $\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))-f(x)\right|\le\varepsilon+\frac{a}{h}\cdot\frac{1}{a+h}\|f\|_1+\frac{1}{h}\int_{x-a}^{x}|f(y)|\,dy$

και παίρνοντας όριο $a\to0$: $\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))-f(x)\right|\le\varepsilon+0+0=\varepsilon$ και αυτό αποδεικνύει ότι το όριο: $\lim_{h\downarrow0}\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))=f(x)$ και όμοια: $\lim_{h\uparrow0}\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))=f(x)$ σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και άρα για κάθε τέτοιο x ισχύει ότι: $F'(x)=f(x)$. ⊛ 2ος τρόπος

▷ **Ορισμός:** Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f: I\to\mathbb{R}$ όπου: I: φραγμένο διάστημα και ή $I=\mathbb{R}$ ονομάζεται **απολύτως συνεχής** αν $\forall\varepsilon>0$: $\exists\delta>0$: τ.ω: αν $(a_1,b_1),\dots,(a_N,b_N)$ είναι πεπερασμένα το πλήθος ξένα ανά 2 ανοιχτά διαστήματα με $\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)<\delta$, τότε: $\sum_{i=1}^{N}(f(b_i)-f(a_i))<\varepsilon$.

▷ **Ορισμός:** Μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται **φραγμένης κύμανσης** αν: [redacted] $\infty>V([a,b])=\sup\sum_{i=1}^{N}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ όπου το supremum είναι ως προς όλες τις διαμερίσεις $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_N=b\}$ του $[a,b]$. Η ποσότητα $V([a,b])$ λέγεται **κύμανση** της f στο $[a,b]$.

Scanned with CamScanner

(*)

2ος τρόπος: $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_{x\text{[redacted]}}^{x+h}(f(y)-f(x))\,dy\right| \le \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(y)-f(x)|\,dy$

$$\le \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|f(y)-f(x)|\,dy = \frac{2}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(y)-f(x)|\,dy \xrightarrow{h\to 0} 0 \text{ για κάθε } x\in Leb(f)$$

και άρα σχεδόν για κάθε x και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- Παρατηρήσεις: 1. Κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής και αν είναι ορισμένη σε συμπαγή διάστημα είναι και φραγμένης κύμανσης.
2. Αν $F, G: I \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχείς και $c \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι: οι cF και cG είναι απολύτως συνεχείς όπως και η $F+G$. Επιπλέον [redacted] αν I είναι συμπαγές διάστημα τότε η FG είναι απολύτως συνεχής.

Scanned with CamScanner

- Αρμονική Ανάλυση: Μάθημα [redacted]: Σπαρτοχιάτης:

- Παρατηρήσεις: 6✓. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel με $\mu((-\infty,x])=f(x)-f(a)$, $x\in[a,b]$, $\mu((-\infty,x])=0$, $x\le a$, $\mu((-\infty,x])=1$, $x\ge b$.

1✓. Κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής και αν είναι ορισμένη σε ένα συμπαγές διάστημα τότε είναι και φραγμένης κύμανσης

2✓. Αν $F,G: I\to\mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις και $c\in\mathbb{R}$ τότε οι cF και cG είναι απολύτως συνεχείς και αν I = συμπαγές διάστημα τότε και η $F\cdot G$ είναι απολύτως συνεχής

3. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε η $x\to V([a,x])$ είναι μη φθίνουσα με $x\in[a,b]$

4. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε αν $a\le x<y\le b$ τότε: $V([a,y])\ge V([a,x]) + |f(y)-f(x)|$

5. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε $f=f_1-f_2$ όπου f_1,f_2: μη φθίνουσες: Πράγματι για $f_1(x)=V([a,x])$ και $f_2(x)=f_1(x)-f(x)$ έχουμε το ζητούμενο από το 4.

- Θεώρημα 20: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια απολύτως συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι διαφορίσιμη λ-σχεδόν παντού, $f'\in L^1([a,b])$ και $\int_a^b f'(x)dx= f(b)-f(a)$.

- Απόδειξη: Αρχικά αφού η f είναι απολύτως συνεχής έπεται ότι υπάρχει μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ με $\mu((-\infty,x])=f(x)-f(a)$ για $x\in[a,b]$, $\mu((-\infty,x])=0$ για $x\le a$ και $\mu((-\infty,x])=1$ για $x\ge b$. από παρατήρηση 6. αφού η f είναι φραγμένης κύμανσης. Ισχυριζόμαστε ότι το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και άρα από το θεώρημα Radon-Nikodym έπεται ότι υπάρχει $g\in L^1(\mathbb{R})$ με: $\mu(B)=\int_B g\,d\lambda$, $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε: $\mu((-\infty,x]) = \int_{-\infty}^x g\,d\lambda \Rightarrow f(x)-f(a)=\int_{-\infty}^x g\,d\lambda$, $\forall x\in[a,b]$. Τώρα από το θεώρημα προηγούμενου μαθήματος έπεται ότι η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη με: $f'(x)=g(x)$ λ-σχεδόν για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- Απόδειξη Ισχυρισμού:

Έστω $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(B)=0$. Τώρα έστω $\varepsilon>0$ και τότε από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue υπάρχει U_1: ανοιχτό τέτοιο ώστε: $\lambda(U_1)<\delta$ όπου το $\delta>0$ είναι αυτό που προκύπτει από την απόλυτη συνέχεια της f. Επίσης: αφού το μ είναι μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι είναι κανονικό και άρα υπάρχει:

$U_1\supseteq U_2\supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq \dots \supseteq B$ με $\mu(U_n)\to\mu(B)$. Τώρα κάθε U_n είναι ξένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων

και άρα: $U_n=\bigcup (a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$

Scanned with CamScanner

και $\sum (b_j^{(n)} - a_j^{(n)}) = \lambda(U_n) \leq \lambda(U_1) < \delta$

και άρα: $|\mu(U_n)| = |\sum \mu((a_j^{(n)}, b_j^{(n)}))| = |\sum (f(b_j^{(n)}) - f(a_j^{(n)}))|$

$\leq \sum |f(b_j^{(n)}) - f(a_j^{(n)})| \leq \varepsilon$ και άρα αφού: $|\mu(U_n)| \longrightarrow |\mu(B)|$

έπεται ότι: $|\mu(B)| \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ και άρα $\mu(B) = 0$

- Πόρισμα: (Ολοκλήρωση Κατά Μέρη): Αν $f, g \in L^1([a,b])$ και $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ και $G(x) = \int_a^x g(y)dy$, $\forall x \in [a,b]$ τότε: $\int_a^b F(x)g(x)dx = (FG)'(b) - (FG)'(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$

- Απόδειξη: Αρχικά έχουμε ότι οι F', G' υπάρχουν λ-σχεδόν παντού πο $[a,b]$ και άρα η $(FG)'$ υπάρχει λ-σχεδόν παντού πο $[a,b]$ και $(F\cdot G)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$. Οι F, G είναι συνεχείς συναρτήσεις και άρα και φραγμένες πο $[a,b]$ και άρα $Fg, fG \in L^1([a,b])$ και άρα $(fG)' \in L^1([a,b])$ και: $\int_a^b (FG)'(x)dx = \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx$. Αν αποδείξουμε ότι η $F\cdot G$ είναι απολύτως συνεχής τότε θα έχουμε από προηγούμενο θεώρημα ότι: $\int_a^b (FG)'dx = (FG)(b) - (FG)(a)$ και άρα θα έχουμε το ζητούμενο. Η FG είναι απολύτως συνεχής αφού $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές και καθεμιά από τις F, G είναι απολύτως συνεχής

+ παρατήρηση 2.

- **Πρόταση:**

Αν $h\in L^1([a,b])$ και $H(x)=\int_a^x h(y)\,dy$ για $x\in[a,b]$, τότε η H είναι απολύτως συνεχής:

- **Απόδειξη:** Έστω μ το μέτρο Borel που ορίζει η h, $\mu(B)=\int_B h(x)\,d\lambda(x)$ για $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έστω ότι η H δεν είναι απολύτως συνεχής, και τότε θα αποδείξουμε ότι το μ δεν είναι απολύτως συνεχές ως προς το λ το οποίο είναι άτοπο (γιατί αν $\lambda(B)=0 \Rightarrow$ τότε: $\int_B h\,d\lambda=0$). Τότε έχουμε ότι υπάρχει ε τέτοιο ώστε για κάθε $\delta>0$ υπάρχει ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων U, τ.ω $\lambda(U)<\delta$ και $\sum|H(b_i)-H(a_i)|\geq\varepsilon$, όπου: $U=\bigcup(a_i,b_i)$.
Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $h\geq 0$ και άρα έχουμε ότι η H είναι μη φθίνουσα και στην περίπτωση αυτή έχουμε: $\sum|H(b_i)-H(a_i)|$ $=\sum(H(b_i)-H(a_i))=\sum\mu(a_i,b_i]\geq\varepsilon$ αφού $\sum\mu(a_i,b_i]=\mu(U)=\sum\mu(a_i,b_i)$

Παίρνουμε $\delta=\frac{1}{n^2}>0$ και τότε υπάρχουν U_n το καθένα ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων τέτοια ώστε: $\lambda(U_n)<\frac{1}{n^2}$ και $\mu(U_n)\geq\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τώρα θέτουμε: $U=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}U_n$ και τότε: $U=\limsup U_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(U_n)<+\infty$ και άρα από το λήμμα Borel-Cantelli: $\lambda(U)=0$. Τώρα: $\mu(U)=\lim_{m\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=m}U_n\right)$ $\geq\limsup\mu(U_n)\geq\varepsilon>0$ και άρα άτοπο.

$\hookrightarrow$ από συνέχεια του μέτρου αφού η $\left(\bigcup_{n=m}^{\infty}U_n\right)_{m\geq1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων

Scanned with CamScanner

- Μάθημα 11ο: Αρμονική Ανάλυση:

• **Σειρές Fourier:**

$$\mathbb{T} = \{ e^{i\theta} : \theta \in [0,2\pi) \} = S^1 = \mathbb{R}/2$$

Μια μετρική πον $\mathbb{T}$ είναι: $d(e^{i\theta}, e^{i\theta'})$ = γεωδαισιακή μετρική $= \min\{|\theta-\theta'|,$ [redacted] $2\pi - |\theta-\theta'|\}$

Άρα θα ταυτίζουμε τον κύκλο $\mathbb{T}$ με το $[0,2\pi)$, με την γεωδαισιακή μετρική. Μερικές φορές με το $[-\pi,\pi)$ και με αυτήν την μετρική ο $\mathbb{T}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και η απεικόνιση: $[0,2\pi) \ni \theta \longrightarrow e^{i\theta}$ είναι ομοιομορφισμός.

- Μια συνάρτηση $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ταυτίζεται με μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = f($ $x - [\frac{x}{2\pi}]2\pi$ [redacted] $)$, $x \in \mathbb{R}$. Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο f για μια συνάρτηση $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και για την αντίστοιχη 2π-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Για $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη το ολοκλήρωμα της f είναι: $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$

- **Βασική Ιδιότητα:** Για κάθε $s \in \mathbb{T}$: $\int_{\mathbb{T}} f(t-s)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)dt$:

γιατί: $\int_0^{2\pi} f(t-s)dt \overset{t'=t-s}{=} \int_{-s}^{2\pi-s} f(t')dt' = \int_0^{2\pi} f(t')dt'$ λόγω της 2π-περιοδικότητας της f.

▸ **Ορισμός:** (Τριγωνομετρική Σειρά): Είναι μια σειρά της μορφής $S \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, $c_n \in \mathbb{C}$ [redacted]

Το σύμβολο $\sim$ δεν υπονοεί τίποτα για την σύγκλιση της σειράς

▸ **Ορισμός:** (Τριγωνομετρικό Πολυώνυμο): Είναι κάθε συνάρτηση της μορφής: $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$, όπου: $c_k \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{T}$. Το P θα έχει βαθμό n αν το n είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός για τον οποίο $c_n \neq 0$ ή $c_{-n} \neq 0$. Ο βαθμός είναι 0 για P σταθερό πολυώνυμο.

• **Παρατήρηση:** $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}dt = \begin{cases} \text{[redacted]}\ 1, & \text{[redacted]}\ n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Αν P είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n: $P(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-n}^{n} c_j \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}dt = \begin{cases} c_k, & \text{[redacted]}\ |k| \leq n \\ 0, & \text{[redacted]}\ |k| > n \end{cases}$$

από τα παραπάνω

CS Scanned with CamScanner

και άρα: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)e^{-ikt}\,dt$, $k\in\mathbb{Z}$ καθορίζουν πλήρως το τριγωνομετρικό πολυώνυμο p.

- <u>Κίνητρο:</u> Από τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα θα ορίσουμε τους αριθμούς $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$ για κάθε συνάρτηση $f:[0,2\pi)\to\mathbb{C}$.

▸ <u>Ορισμός:</u> Για μια συνάρτηση $f\in L^1(\mathbb{T})$ ορίζουμε: $\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ για $n\in\mathbb{Z}$.

Οι αριθμοί $\hat{f}(n)$ όπου $n\in\mathbb{Z}$ είναι οι <u>συντελεστές Fourier</u> της f.

Γράφουμε: $S(f)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int}$ (η σειρά Fourier της f) και ξανά το $\sim$ δεν σημαίνει κάτι για την σύγκλιση της σειράς, πόσο μάλλον για την σύγκλιση της f.

Θα γράφουμε $S_n(f)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}$ το n-οστό τριγωνομετρικό πολυώνυμο της f που είναι μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f. Γενικά μια τριγωνομετρική σειρά θα λέγεται σειρά Fourier αν είναι σειρά Fourier κάποιας $f\in L^1(\mathbb{T})$.

- Για μια $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ μετρήσιμη η $\|f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$, $1\le p<+\infty$ και

$\|f\|_\infty=\inf\{t>0:\ \lambda(\{x\in\mathbb{T}: |f(x)|>t\})=0\}$

- Για $1\le p<q\le+\infty$ ισχύει ότι: $\|f\|_p\le\|f\|_q$ από Hölder και $\|f\|_p\to\|f\|_\infty$ καθώς $p\to+\infty$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι: $L^1(\mathbb{T})\supseteq$ [redacted] $L^2(\mathbb{T})\supseteq L^\infty(\mathbb{T})$, $\forall p$ ή καλύτερα

$L^p(\mathbb{T})\supseteq L^q(\mathbb{T})$, $\forall\, p\le q$

▸ <u>Πρόταση:</u> Αν $f,g\in L^1(\mathbb{T})$, $c\in\mathbb{C}$ τότε:

(α). $\widehat{(f+g)}(n)=\hat{f}(n)+\hat{g}(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

(β). $\widehat{(cf)}(n)=c\hat{f}(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

(γ). $\hat{f}(-n)=$ [redacted] $\overline{\hat{f}(n)}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

(δ). Αν για $s\in\mathbb{T}$ ορίσουμε $f_s(t)=f(t-s)$ [redacted] τότε: $\hat{f_s}(n)=e^{-ins}\hat{f}(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

(ε). $|\hat{f}(n)|\le\|f\|_1$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ και άρα: $\|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$

CS Scanned with CamScanner

- **Πόρισμα:** Αν $f_k\in L^1(\mathbb{T}), k\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε: $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f\in L^1(\mathbb{T})$ τότε: $\hat{f_k}(n) \xrightarrow{k\to\infty} \hat f(n)$ ομοιόμορφα ως προς n και άρα: $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f_k}(n) - \hat f(n)| \to 0$ όταν $k\to+\infty$

- **Απόδειξη:** $|\hat{f_k}(n)-\hat f(n)| = |\widehat{f_k-f}(n)| \le \|f_k-f\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ από προηγούμενη πρόταση και άρα: $\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f_k}(n)-\hat f(n)| \le \|f_k-f\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ και άρα έχουμε το ζητούμενο

- **Πόρισμα:** Αν $s \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$ είναι μια τριγωνομετρική σειρά τέτοια ώστε: τα μερικά αθροίσματα $s_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ ικανοποιούν $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ τότε: $c_k = \hat f(k)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$.

- **Απόδειξη:** $\cancel{|c_k-\hat f(k)| = |\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi}}$ Παρατηρούμε ότι: $\hat{s_n}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}e^{-ikt}$ [redacted] $= \sum_{j=-n}^n c_j \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}dt = \sum_{j=-n}^n c_j\delta_{jk}$. Όμως: $|\hat{s_n}(k)-\hat f(k)| \le \|s_n-f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και άρα: $\forall k\in\mathbb{Z}$: $\hat{s_n}(k)\to\hat f(k)$, και αν: $n\ge|k|$: $\hat{s_n}(k)=c_k$ και άρα έχουμε ότι: $c_k=\hat f(k)$ και άρα έχουμε το ζητούμενο

- **Παρατήρηση:** Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ τότε: $\hat f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$

- **Πρόταση:** Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$, με $\hat f(0)=0$. Τότε η $F(t)=\int_0^t f(s)ds$, $t\in\mathbb{T}$ είναι στον $L^1(\mathbb{T})$ και είναι 2π-περιοδική. Μάλιστα: $\hat F(n)=\frac{1}{in}\hat f(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

- **Απόδειξη:** Αρχικά έχουμε ότι: [redacted] αφού $f\in L^1(\mathbb{T})$ έπεται ότι $F\in$ [redacted] $(\mathbb{T})$ από θεώρημα (μάλιστα απολύτως συνεχής) και $F(2\pi)=\int_0^{2\pi} f(s)ds = 2\pi\hat f(0) = 2\pi\cdot 0 = 0 = F(0)$ και άρα είναι 2π-περιοδική. Έστω τώρα: $e_n(t)=e^{int}$ και $E_n(t)=\int_0^t e^{-ins}ds$, $t\in\mathbb{T}$. Τότε: $E_n(t)=\frac{1}{in}(1-e^{int})$ (αφού: $e^{ins}=\left(\frac{1}{in}e^{ins}\right)'$), και

$$\hat F(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)e_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\left(\frac{e^{-int}}{-in}\right)'dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{in}\left(\underbrace{F(2\pi)}_{=0}e^{-2\pi i n} - \underbrace{F(0)}_{=0}\right)\right] - \int_0^{2\pi}F'(t)\left(\frac{e^{-int}}{-in}\right)dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}$$

$= \frac{1}{in}\hat f($ [redacted] $n)$

Scanned with CamScanner

- **Πόρισμα:** Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ είναι απολύτως συνεχής τότε $f'\in L^1(\mathbb{T})$ και $\widehat{(f')}(n) = in\hat{f}(n)$

▸ **Απόδειξη:** Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(0)=0$. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα της f' είναι η f. Από την πρόταση: $\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\hat{f'}(n)$ για $n\neq 0, n\in\mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι: $\int_0^{2\pi} f'(s)\,ds = f(2\pi)-f(0) = 0$ και άρα: $\hat{f'}(0) = i\cdot 0\cdot \hat{f}(0)$.

Αν τώρα $f(0)\neq 0$ τότε δουλεύουμε με την $g=f-f(0)$ και έχουμε ότι:

$\widehat{(f-f(0))}(n) = \frac{1}{in}\widehat{(f-f(0))'}(n)$ και άρα: $\hat{f}(n) - \underbrace{\widehat{f(0)}(n)}_{=0} = \frac{1}{in}\hat{f'}(n)$ για $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

και άρα: $\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\hat{f'}(n)$, για $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

(Απολύτως συνεχής στο $\mathbb{T}$ σημαίνει απολύτως συνεχής στο $[0,2\pi]$ και 2π-περιοδική)

Scanned with CamScanner

- Μάθημα 12ο: Αρμονική Ανάλυση: Σκαρμιόγιαννης

▷ <u>Συνέλιξη Συναρτήσεων:</u> Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Ορίζουμε την συνέλιξη των f και g ως: $(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)\,ds$ ως την συνέλιξη των f και g.

- Η $f*g$ είναι καλά ορισμένη: Αρχικά η $s \longmapsto t-s$ είναι συνεχής και η f είναι μετρήσιμη και άρα η συνάρτηση: $s \longmapsto f(t-s)$ είναι μετρήσιμη ως σύνθεση συνεχούς με μετρήσιμη. Έτσι και η $s \longmapsto f(t-s)g(s)$ είναι μετρήσιμη ως γινόμενο τέτοιων.
Επίσης έχουμε ότι: $\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)||g(s)|\,dt\,ds = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)||g(s)|\,dt\,ds = \int_{\mathbb{T}} |g(s)|\left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)|\,dt\right)ds$

$= \left(\int_{\mathbb{T}} |g(s)|\,ds\right)\left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|\,dt\right)$ αφού $f, g \in L^1(\mathbb{T})$.

Τώρα από το θεώρημα Tonelli: $s \longmapsto f(t-s)g(s) \in L^1(\mathbb{T})$ για σχεδόν κάθε $t \in \mathbb{T}$

▷ <u>Πρόταση:</u> Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε:

1. $f*g \in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$
2. $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

- <u>Απόδειξη:</u> 1. $\|f*g\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f*g(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)\,ds\right| dt$

$\le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)||g(s)|\,ds\,dt \overset{\text{Tonelli}}{=} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{T}} |g(s)|\left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)|\,dt\right)ds$

$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\int_{\mathbb{T}} |g(s)|\,ds\right)\left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|\,dt\right) = \|f\|_1 \|g\|_1$ και άρα έχουμε το 1.

2. $\widehat{f*g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f*g)(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds\right)e^{-int}\,dt$

$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t-s)e^{-int}\right)g(s)\,ds = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t-s)e^{-in(t-s)}\,dt\right)g(s)e^{-ins}\,ds$

$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(s)e^{-ins}\,ds\right)$

Scanned with CamScanner

$= \hat{f}(n)\hat{g}(n)$

- **Πρόταση:** Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε έχουμε ότι:

(α). $f * g = g * f$ (μεταθετική)

(β). $(f*g)*h = f*(g*h)$ (προσεταιριστική)

(γ). $f*(g+h) = f*g + f*h$ (

- **Απόδειξη:** $(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds \overset{u=t-s}{\underset{du=-ds}{=}} -\frac{1}{2\pi}\int_t^{t-2\pi} f(u)g(t-u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{t-2\pi}^{t} g(t-u)f(u)\,du = (g*f)(t)$

$\hookrightarrow$ 2π-περιοδική

- $((f*g)*h)(t) = \cancel{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(}$ .... με απλές πράξεις και όμοια και το (γ).

▷ **Λήμμα:** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ορίζω $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}$ και τότε: $(e_n * f)(t)$
$= e_n(t)\hat{f}(n)$

- **Απόδειξη:** $(e_n * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_n(t-s)f(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t-s)}f(s)\,ds = e^{int}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ins}f(s)\,ds$

$= e_n(t)\hat{f}(n)$

- **Πόρισμα:** Έστω $P(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο, $c_j \in \mathbb{C}$. Τότε $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε ότι: $P * f(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)c_j e^{ijt}$

CS Scanned with CamScanner

- Πυρήνες Αθροισιμότητας:

- **Ορισμός:** Ένας πυρήνας αθροισιμότητας στο $\mathbb{T}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(K_n)_{n\geq 1}$ στο $\mathbb{T}$ ή ισοδύναμα 2π-περιοδικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ ($K_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ή $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-περιοδική) τέτοια ώστε: (α). $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)\,dt = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$, (β). $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} |K_n(t)|\,dt < +\infty$ και (γ). $\lim_{n\to\infty} \int_\delta^{2\pi} |K_n(t)|\,dt = 0, \ \forall \delta > 0$

- Ένας πυρήνας αθροισιμότητας είναι θετικός αν $K_n(t) \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in \mathbb{T}$.

Στην περίπτωση αυτή η (β). του ορισμού προκύπτει άμεσα από την (α).

- **Πρόταση:** (Δύο βασικές ιδιότητες του $L^1(\mathbb{T})$):

1. Αν $f \in L$[redacted]$(\mathbb{T})$ και $f_s(t) = f(t-s)$, $t, s \in \mathbb{T}$ τότε: $f_s \in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f_s\|_1 = \|f\|_1$
2. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ [redacted] έχουμε ότι: $\|f_s - f\|_1 \xrightarrow{s\to 0} 0$ και επίσης $\|f_s - f_t\|_1 \xrightarrow{s \to t} 0$

- **Απόδειξη:**

1. Το έχουμε δει
2. Έστω αρχικά $f \in C(\mathbb{T})$. Έστω και $\varepsilon > 0$. Τότε έχουμε ότι: $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $\rho(s,t) = \min\{|s-t|, 2\pi - |s-t|\} < \delta$ τότε: $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ (ομοιόμορφα συνεχής) Έτσι έχουμε ότι αν $0 < s < \delta$ τότε ~~έχουμε~~ ότι: ή $2\pi - \delta < s < 2\pi$ τότε έχουμε ότι: [redacted] $|f_s(t) - f(t)| = |f(t-s) - f(t)| < \varepsilon, \ \forall t \in \mathbb{T}$. Άρα τώρα έχουμε ότι: $\|f_s - f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_s(t) - f(t)|\,dt \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon\, 2\pi = \varepsilon$ και άρα αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε ότι: $\lim_{s\to 0} \|f_s - f\|_1 = 0$. Γενικά: $\|f_t - f_s\|_1 = \|f_{t-s} - f\|_1$ με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής και άρα: $\lim_{s\to t} \|f_t - f_s\|_1 = \lim_{s \to t} \|f_{t-s}$ [redacted] $- f\|_1 = 0$. Τώρα γενικά: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$ τυχαίο βρίσκουμε $g \in C(\mathbb{T})$ με: $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε όμως:

$\|f_s - f\|_1 \leq \|f_s - g_s\|_1 + \|g_s - g\|_1 + \|g - f\|_1$ [redacted] $= \|f - g\|_1 + \|g_s - g\|_1 + \|f - g\|_1$
$= 2\|f - g\|_1 + \|g_s - g\|_1 < \varepsilon + \|g_s - g\|_1$ και άρα παίρνοντας $\overline{\lim_{s\to 0}}$ έχουμε ότι: $\overline{\lim_{s\to 0}} \|f_s - f\|_1 \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$ και άρα αφήνοντας $\varepsilon \to 0^+$: $\limsup_{s\to 0} \|f_s - f\|_1 = 0$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Scanned with CamScanner

- Τύπος Αλλαγής Μεταβλητής:

Αν $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $T: \mathcal{U} \to V$ είναι διαφορίσιμη, επί, 1-1 (και [redacted] $\det J_T(x) \neq 0$, $\forall x \in V$) τότε: $\int_V f(T(x))|\det J_T(x)|\,dx = \int_V f(y)\,dy$

- Θεώρημα: Αν $(K_n)_{n\geq 1}$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας και $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε έχουμε ότι: $\|K_n * f - f\|_1 \to 0$ όταν $n \to +\infty$.

- Απόδειξη: Έχουμε αρχικά ότι: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) f(t-s)\,ds - f(t) = (K_n * f)(t) - f(t)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(K_n(s) f(t-s) - f(t) K_n(s)\right) ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f(t-s) - f(t)\right) ds \quad (*)$$

αφού: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\,ds = 1$

$$\Rightarrow \left| \cancel{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) f(t-s)\,ds - f(t)} \right| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cancel{K_n(s)\left(f(t-s)-f(t)\right) ds} \right| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_0 \right|$$

$$\|K_n * f - f\|_1 = \cancel{\int_0^{2\pi} |K_n(s)} \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n * f(t) - f(t)|\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f_s(t) - f(t)\right) ds \right| dt$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,|f_s(t) - f(t)|\,ds\,dt \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,|f_s(t) - f(t)|\,dt\,ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} |K_n(s)| \left(\int_0^{2\pi} |f_s(t) - f(t)|\,dt \right) ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,\|f_s - f\|_1\,ds$$

Scanned with CamScanner

- Μάθημα 13ο: Αρμονική Ανάλυση Σκαθάριστες

- **Θεώρημα:** Αν $(K_n)_{n\geq 1}$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας και $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε έχουμε ότι:

$$\|K_n * f - f\|_1 \longrightarrow 0 \text{ όταν } n \to +\infty.$$

- **Απόδειξη:** Έχουμε αρχικά ότι: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) f(t-s)\,ds - f(t) = (K_n * f)(t) - f(t)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(K_n(s)f(t-s) - f(t)K_n(s)\right)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f(t-s)-f(t)\right)ds \quad (*)$$

αφού: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\,ds = 1$

$$\Rightarrow \left|\cancel{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds - f(t)}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\cancel{\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f(t-s)-f(t)\right)ds}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{}\right|$$

$$\|K_n * f - f\|_1 = \cancel{\int_0^{2\pi} |K_n(s)|}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n * f(t) - f(t)|\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f_s(t) - f(t)\right)ds\right|dt$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|K_n(s)|\,|f_s(t)-f(t)|\,ds\,dt \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|K_n(s)|\,|f_s(t)-f(t)|\,dt\,ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}|K_n(s)|\left(\int_0^{2\pi}|f_s(t)-f(t)|\,dt\right)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|K_n(s)|\,\|f_s - f\|_1\,ds = \frac{1}{2\pi}\left(\int_\delta^{2\pi-\delta}|K_n(s)|\,\|f_s-f\|_1\,ds\right.$$

$$\left.+\int_{-\delta}^{\delta}|K_n(s)|\,\|f_s-f\|_1\,ds\right).$$ Τώρα για το πρώτο παρατηρούμε ότι: $\|[redacted] f_s - f\|_1 \leq \|f_s\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$ και άρα: $\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}|K_n(s)|\,\|f_s-f\|_1\,ds \leq 2\|f\|_1\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}|K_n(s)|\,ds$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0$ εξ' ορισμού. Τώρα για το δεύτερο ολοκλήρωμα: επειδή: $\|f_s - f\|_1 \xrightarrow{s\to 0} 0$

Επίσης ότι: $\forall \varepsilon > 0$: $\exists$ $\delta\in(0,\pi)$ [redacted] ώστε αν: $s \in [-\delta, \delta]$ έχουμε ότι: $\|f_s - f\|_1 < \varepsilon$.

CS Scanned with CamScanner

Έτσι: επιλέγουμε τυχόν $\varepsilon>0$ και τότε βρίσκουμε ένα τέτοιο $\delta>0$ $(\delta\in(0,\pi))$ και έχουμε ότι:

$$\int_{-\delta}^{\delta} |K_n(s)|\,\|f_s-f\|_1\,ds \le \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}|K_n(s)|\,ds \le \varepsilon\, 2\pi\,\|K_n\|_1 \le \varepsilon\, 2\pi \sup_{n\in\mathbb{N}}\|K_n\|_1 = 2\pi\varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}}\|K_n\|$$

[redacted] $= 2\pi\varepsilon C$ και άρα αφήνοντας $n\to+\infty$: $\limsup_{n\to+\infty}\|K_n*f-f\|_1 \le 2\pi\varepsilon C,\ \forall \varepsilon>0$

και άρα αφήνοντας $\varepsilon\to0^+$ έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Πυρήνας Dirichlet</u>: $D_n(t)=\sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}$, $t\in\mathbb{T}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, και αυτό είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Τότε έχουμε ότι: $D_n*f(t)=\sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)\,e^{ijt}=(S_n*f)(t)$ από πόρισμα που έχουμε δει.

▷ <u>Λήμμα</u>: $D_n(t)=\dfrac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\mathbb{N}_0$, $t\in\mathbb{T}$:

- <u>Απόδειξη</u>:

$$D_n(t)=\sum_{j=0}^{n}e^{ijt}+\sum_{j=-n}^{0}e^{ijt}-1=\sum_{j=0}^{n}e^{ijt}+\sum_{j=0}^{-n}e^{-ijt}-1=\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}+\frac{1-e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-t}}$$

$$-1=\frac{e^{-it/2}-e^{i(n+1/2)t}}{e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}}+\frac{e^{\frac{it}{2}}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{\frac{it}{2}}-e^{-\frac{it}{2}}}-1=\frac{e^{-\frac{it}{2}}-e^{i(n+1/2)t}-e^{it/2}+e^{-i(n+1/2)t}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}-1$$

$$=\frac{e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}}{e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}}-\frac{e^{it(n+1/2)}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{-\frac{it}{2}}-e^{it/2}}-1=1-\cancel{\frac{e^{\frac{it}{2}}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}}\qquad\left(\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right)$$

$$=1+\frac{e^{i(n+1/2)t}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}-1=\frac{2i\sin(n+1/2)t}{2i\sin(t/2)}=\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$$

CS Scanned with CamScanner

Άσκηση: $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$: $\|D_n\|_1 \sim \frac{4}{\pi^2} \log n$: Επομένως έχουμε ότι: ο πυρήνας D_n δεν είναι πυρήνας αθροισιμότητας όπως θα θέλαμε αφού δεν είναι φραγμένος ως προς $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|D_n\|_1 = +\infty$.

Πυρήνας Fejér: $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)\right)$ (οι μέσοι όροι του πυρήνα Dirichlet).

• Τώρα: $(K_n * f)(t) = \frac{1}{n+1}\left(D_0 * f(t) + D_1 * f(t) + \dots + D_n * f(t)\right) = \frac{1}{n+1}\left(S_0(f)(t) + \dots + S_n(f)(t)\right)$ = οι μέσοι όροι των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της f [redacted]

Λήμμα 1ο: 1). $K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{T}$

2). $K_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(\text{[redacted]}\,(n+1)\frac{t}{2})}{\sin^2(t/2)} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $\forall t \in \mathbb{T}$

Απόδειξη: 1). Ένας τρόπος είναι ο εξής: $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(1 + (1 + e^{it} + e^{-it}) + (1 + e^{it} + e^{-it} + e^{i2t} + e^{-2it}) + \dots + (1 + e^{it} + e^{-it} + e^{i2t} + e^{-i2t} + \dots + e^{int} + e^{-int})\right)$

$= \frac{1}{n+1}\left((n+1)\cdot 1 + n e^{it} \cancel{+ (n-1) e^{it}} + n(e^{it} + e^{-it}) + \dots + (e^{int} - e^{-int})\right)$

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)(e^{it} - e^{-it}) + \dots + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)(e^{int} + e^{-int}) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}$

1). **Άλλος τρόπος:** $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-k}^{k} e^{ijt} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} e^{ijt} + \sum_{j=0}^{k} e^{-ijt}\right) - 1$

$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(e^{ijt} + e^{-ijt}) - 1 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(e^{ijt} + e^{-ijt})$ [redacted] $- 1 = \dots = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n}\right) e^{ijt} = K_n(t)$

2). Παρατηρούμε ότι: $\sin^2(t/2) = \left(\frac{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{it} + e^{-it} - 2\text{[redacted]}}{4}$

$= \frac{2 - e^{it} - e^{-it}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{it} - \frac{1}{4} e^{-it}$ και επίσης: $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{it} - \frac{1}{4} e^{-it}\right) K_n(t)$

Scanned with CamScanner

$$=\left(-\frac{1}{4}e^{it}-\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}=-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i(n+1)t}=\sin^2\frac{(n+1)t}{2}$$

γιατί: πράξεις με επιμεριστική ιδιότητα και βγαίνει.

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)}=\frac{1}{2(n+1)\sin t/2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin(t/2)\sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)}$$

$$=\frac{1}{2(n+1)\sin^2(t/2)}\sum_{k=0}^{n}2\sin(t/2)\sin\left(k+\tfrac{1}{2}\right)t=\frac{1}{2(n+1)\sin^2(t/2)}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(k\text{[redacted]}t)-\cos(k+1)t\right)$$

$$=\frac{1}{2(n+1)\sin^2(t/2)}\left(1-\cos(n+1)t\right)=\frac{1-\cos((n+1)t)}{2(n+1)\sin^2(t/2)}=\frac{1}{2(n+1)\sin^2 t/2}\cdot 2\sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{(n+1)\sin^2 t/2}\qquad \left(1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\right)$$

- <u>Πόρισμα:</u> Ο πυρήνας του Fejér είναι πυρήνας άθροισης:

▷ <u>Απόδειξη:</u> <u>i).</u> $\int_0^{2\pi}K_n(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\sum_{\text{[redacted]}\,j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}\,dt=\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\text{[redacted]}\int_0^{2\pi}e^{ijt}\,dt$

μόνο για $j=0$ $=2\pi$

<u>ii).</u> Επίσης: $K_n(t)\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}:\ \|K_n\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(t)\,dt=1<+\infty$

<u>iii).</u> $\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}K_n(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{\sin^2\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin^2(t/2)}\,dt$ (*). Όμως: για $\delta<t<2\pi-\delta$

έχουμε ότι: $\frac{\delta}{2}<\frac{t}{2}<\pi-\frac{\delta}{2}\Rightarrow \sin^2(t/2)\geq\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)>0$ και άρα:

$$(*)\leq\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}\,dt=\frac{2(\pi-\delta)}{2\pi(n+1)}\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\leq\frac{\pi}{\pi\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)(n+1)}=\frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\xrightarrow{n\to+\infty}0$$

Scanned with CamScanner