• Στον δ.χ. $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέμε ότι $f \sim g \Leftrightarrow \|f-g\|_\infty \Leftrightarrow f = g$ μ-σ.π.

Ορίζουμε $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)/\sim \; = \{[f] : f \in \mathcal{L}^\infty\}$ και ορίζουμε πράξεις στις κλάσεις έτσι ώστε ο $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ να είναι γραμ. χώρος με νόρμα.

<u>Θεώρημα</u>: Ο $(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ είναι Banach

Απόδειξη: Έστω $(f_n)_n$ βασική ακολουθία στον L^∞. Θα δ.ο. η $(f_n)_n$ συγκλίνει στον L^∞. Θέτουμε $A_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε, $A_{n,m} \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_{n,m}) = 0$ $\forall n, m$ (παρατήρηση 2)). Έστω $A = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m}$. Είναι $\mu(A) \leq$ $\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}) = 0 \Rightarrow \mu(X \setminus A^c) = 0$.

Για $x \in A^c$ έχουμε ότι $|f_n(x) - f_m(x)| \leq$ $\leq \|f_n - f_m\|_\infty$ $\forall n, m$. Αυτό δείχνει ότι $\forall x \in A^c$ η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))_n$ στο $\mathbb{K}$ είναι Cauchy. Άρα, για κάθε $x \in A^c$ υπάρχει $f(x) \in \mathbb{K}$ τ.ω. $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ ($\mathbb{K}$ Banach). Έχουμε $x \in A^c$ fixed και $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι $|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)|$ $\leq \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty$ (βάζουμε limsup γιατί δεν γνωρίζουμε κάτι για την ύπαρξη του ορίου). Τώρα, δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ $\forall n, m \geq n_0(\varepsilon)$. Άρα, $\forall x \in A^c$ και $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε ότι $|f_n(x) - f(x)| \leq \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0(\varepsilon)$

$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ (καθώς $\mu(X \setminus A^c) = 0$). Έτσι,

$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0$ και έχω τελειώσει. □

Δηλαδή, για $x\in A^c$, $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ όσο $n\geq n_0(\varepsilon)$, άρα για

$$\left.\begin{array}{l} x\in A^c \quad f_n(x)\xrightarrow{n} f(x) \\ \mu(X\setminus A^c)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ η f_n συγκλίνει ουσιωδώς κ.ο. στην f,

άρα $\|f_n-f\|_\infty \xrightarrow{n} 0$

<u>Ορισμός</u>: Αν $p,q>1$ τ.ω. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, θα λέμε ότι οι p,q είναι συζυγείς εκθέτες. Επίσης, θεωρούμε ότι τα $1,\infty$ είναι συζυγείς εκθέτες.

<u>Ο δυϊκός των L^p</u>

<u>Γραμμικοί τελεστές</u>: Έστω X,Y γραμμικοί χώροι με νόρμα επί του ίδιου σώματος $\mathbb{K}$. Μια απεικόνιση $T:X\to Y$ λέγεται γραμμική αν $T(\alpha x+by)=\alpha T(x)+bT(y)$ $\forall x,y\in X$, $\forall \alpha,b\in\mathbb{K}$.

Μια γραμμική απεικόνιση $T:X\to Y$ λέγεται φραγμένη αν υπάρχει $c\in(0,\infty)$ σταθερά με $\|T(x)\|\leq c\cdot\|x\|$, για όλα τα $x\in X$.

<u>Πρόταση</u>: Αν X,Y γραμμικοί χώροι με νόρμα και $T:X\to Y$ γραμμικός τελεστής, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) T συνεχής
2) T συνεχής στο 0.
3) T φραγμένος

Απόδειξη:

1) $\to$ 2): προφανής

2) $\to$ 3): Έστω T σ/χης στο 0, δηλ. $\forall \varepsilon>0$

$\exists\ \delta>0$ τ.ω. για $\|x\|<\delta$ να είναι $\|T(x)\|<\varepsilon$.
Θεωρώ $\varepsilon=1$, τότε $\exists\ \delta>0$ τ.ω. αν $\|x\|<\delta$ να είναι $\|T(x)\|<1$. Έστω $x\in X\setminus\{0\}$, τότε

$$\left\| \frac{x}{\|x\|}\cdot\frac{\delta}{2} \right\| = \frac{\delta}{2}<\delta \quad \text{και έτσι} \quad \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\cdot\frac{\delta}{2}\right)\right\| < 1$$

$\Rightarrow \|T(x)\| < \frac{2}{\delta}\cdot\|x\|$. Επίσης, για $x=0$ $T(x)=0$

γραμμικότητα του T

και έτσι, για $c=2/\delta$, ο T είναι φραγμένος.

3) $\to$ 1): Αρκεί ν.δ.ο. ο T είναι συνεχής στο 0 καθώς αν $x_0\in X$ και $\varepsilon>0$ τότε $\exists\ \delta>0$ τ.ω. αν $\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|T(x-x_0)\|<\varepsilon$ ή $\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$ και έχουμε τη συνέχεια του T στο x_0. Από υπόθεση $\exists\ c\in(0,\infty)$ τ.ω. $\forall x\in X$ είναι $\|T(x)\|\leq c\cdot\|x\|$. Έστω $\varepsilon>0$, τότε για $\delta=\frac{\varepsilon}{2c}$ και $\|x\|<\delta$ είναι $\|T(x)\|\leq c\cdot\|x\|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ και έπεται η συνέχεια στο 0. $\square$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $T: X\to Y$ γραμμικός τελεστής όπου X, Y χώροι με νόρμα· τότε ορίζουμε τη νόρμα του T ως $\|T\| := \inf\{c\in(0,\infty) : \forall x\in X\ \|T(x)\|\leq c\cdot\|x\|\}$.

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Ισχύει ότι $\|T(x)\|\leq\|T\|\cdot\|x\|$ $\forall x\in X$.

Πράγματι, έστω $c_n=\|T\|+1/n$, τότε για κάθε $x\in X$ είναι $\|T(x)\|\leq c_n\|x\| \xrightarrow{n} \|T\|\cdot\|x\|$ (και άρα $\|T\|\in\{c\in(0,\infty) : \|T(x)\|\leq c\cdot\|x\|\ \forall x\} \Rightarrow \|T\|=\min\{c\in(0,\infty) : \|T(x)\|\leq c\cdot\|x\|\ \forall x\}$.

2) $\|T\|=\sup\{\|T(x)\| : x\in X, \|x\|\leq 1\}=\sup\{\|T(x)\| : \|x\|=1\}$.

Έστω $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$, τότε $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\|$, άρα $\sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|T\|$. Αντίστροφα, έστω $A = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$. Αν $x \in X$, τότε $\|T(x)\| = \|x\| \cdot \|T(x/\|x\|)\| \leq A \cdot \|x\|$ και άρα $\|T\| \leq A$.

Ομοίως και αν $A = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$.
Τελικά, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$.

* Για $T : X \to Y$ φραγμένο έχει νόημα η $\|T\|$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω X, Y γραμμικοί χώροι με νόρμα, τότε ο $B(X,Y) = \{T : X \to Y, \text{ γραμ. και φρ.}\}$ με τη νόρμα τελεστή είναι γραμμικός χώρος με νόρμα και αν ο Y είναι Banach, τότε είναι και ο $B(X,Y)$.

Απόδειξη:

Για $T, S \in B(X,Y)$, $c \in \mathbb{K}$ οι $T+S : X \to Y$, $x \mapsto T(x) + S(x)$, $c \cdot T : X \to Y$, $x \mapsto c \cdot T(x)$ είναι γραμμικές. Επιπλέον, για $x \in X$ είναι $\|(T+S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (\|T\| + \|S\|) \cdot \|x\|$, άρα ο $T+S$ είναι φραγμένος και μάλιστα $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$. Και για $x \in X$ είναι $\|(cT)(x)\| = \|c \cdot T(x)\| = c \cdot \|T(x)\| \leq c \cdot \|T\| \cdot \|x\|$, άρα ο $c \cdot T$ είναι φραγμένος και μάλιστα $\|cT\| \leq c \cdot \|T\|$. Επίσης, είναι $\|T\| = \|c^{-1} \cdot c \cdot T\| \leq c^{-1} \cdot \|c \cdot T\| \Rightarrow c \cdot \|T\| \leq \|c \cdot T\|$ και τελικά, $\|c \cdot T\| = c \cdot \|T\|$.

Τέλος, προφανώς $\forall\, T \in B(X,Y)$ ισχύει ότι $\|T\| \geq 0$ και αν $\|T\| = 0$ τότε αφού $\forall\, x \in X$ ισχύει ότι $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, έπεται ότι $T(x) = 0$ $\forall x \Rightarrow T = 0$. Τα παραπάνω κάνουν το $B(X,Y)$ γραμμιας χώρο με νόρμα (εύκολα ελέγχονται τα αξιώματα 1) ως 8) των δ.χ.).

* Προφανώς ο $c\cdot T$ έχει νόρμα για $c\neq 0$.
Έστω τώρα ότι ο Y είναι πλήρης. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο $B(X,Y)$ είναι πλήρης. Έστω λοιπόν $(T_n)_{\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον $B(X,Y)$. Έστω $x\in X$, είναι $\|T_n(x)-T_m(x)\| = \|(T_n-T_m)(x)\| \leq$
$\leq \|T_n - T_m\|\cdot\|x\|$, δηλαδή λαμβάνουμε ότι για κάθε $x\in X$, η $(T_n(x))_{\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον Y, όμως ο Y είναι Banach και άρα $\exists\ T(x)\in Y$ με
$\lim_n T_n(x) = T(x)$. Αν $T: X\to Y$ με $T(x) = \lim_n T_n(x)$, τότε ο T είναι γραμμικός: $T(\alpha x + by) =$
$= \lim_n T_n(\alpha x+by) = \alpha \lim_n T_n(x) + b\lim_n T_n(y) =$
$= \alpha T(x) + b\,T(y)$.
Επίσης, ο T είναι φραγμένος: Έστω $\varepsilon>0$, τότε $\exists\ n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\|T_n(x)-T_m(x)\|\leq \varepsilon\cdot\|x\|$ $\forall\, n,m\geq n_0$, $\forall x\in X$.
Άρα, $\lim_{m\to\infty}\|T_n(x)-T_m(x)\| \leq \lim_{m\to\infty}(\varepsilon\cdot\|x\|)$ $\forall n\geq n_0, \forall x$

$\Rightarrow \|T_n(x)-T(x)\|\leq \varepsilon\cdot\|x\|$ $\forall n\geq n_0$, $\forall x$, δηλαδή για μεγάλα n έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} T_n - T\in B(X,Y) \\ B(X,Y) \text{ γρ. χώρος}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$T = (T_n - T) - T_n \in B(X,Y)$, δηλ. ο T είναι φραγμένος.
Και είδαμε ότι $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ n_0$ με $\|T_n(x)-T(x)\|\leq$ $\varepsilon\cdot\|x\|$ $\forall n\geq n_0$, $\forall x$ $\Rightarrow$ $\|T_n - T\|<\varepsilon$ $\forall\ n\geq n_0$ $\Rightarrow$
$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ και τελικά ο $B(X,Y)$ είναι Banach. $\square$

<u>Ορισμός</u>: Έστω X χώρος Banach, τότε ο χώρος των φραγμένων τελεστών $B(X, \mathbb{K})$ καλείται δυϊκός του X, συμβολίζεται με X^* και τα στοιχεία του, δηλαδή οι φραγμένοι τελεστές $\phi : X \to \mathbb{K}$ καλούνται φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή.

* Νόρμα του $\phi \in X^*$: $\|\phi\| = \sup\{ |\phi(x)| : \|x\| \leq 1 \}$.

Αν X, Y χώροι Banach και υπάρχει $T : X \to Y$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής που είναι 1-1, επί και ο T^{-1} είναι επίσης φραγμένος, τότε οι X, Y λέγονται ισόμορφοι.
Αν επιπλέον ο T μπορεί να επιλεχθεί ισομετρία, τότε οι X, Y λέγονται ισομετρικά ισόμορφοι.

<u>Δυϊκοί χώροι του L^p, $1 \leq p < \infty$</u> : Έστω fixed χώρος σ-πεπ/νου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

<u>Πρόταση</u>: Οι απλές συναρτήσεις $s : X \to \mathbb{K}$ για τις οποίες είναι $\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty$ είναι πυκνές στον $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$.

Απόδειξη:

Έστω s απλή με διακεκριμένες τιμές $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $A_k = s^{-1}(\{\alpha_k\}) \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_k) < \infty$ $\forall k$ (χβγ $\alpha_k \neq 0$). Τότε, $s = \sum_1^n \alpha_k \chi_{A_k}$ η κανονική της αναπαράσταση και $s \in L^p$ καθώς $\int |s|^p d\mu =$

$= \int \sum_1^n |\alpha_k|^p \cdot \chi_{A_k} \, d\mu = \sum_1^n \int |\alpha_k|^p \chi_{A_k} \, d\mu =$

$A_1, \dots, A_n$ ξένα και γι αυτό λειτουργεί έτσι ο πολ/μος

$= \sum_1^n |\alpha_k|^p \cdot \mu(A_k) < \infty$.

* κάθε s απλή και μετρήσιμη με $\mu([s\neq 0])<\infty$ γράφεται όπως πριν, δηλ. $\mu(A_k)<\infty$ $\forall k$ τ.ω. $\alpha_k\neq 0$ και $A_1,\dots,A_n$ ξένα.

* Η τιμή 0 δεν έχει νόημα σε απλή μετρήσιμη.

Έστω τώρα $f\in L^p$. Θεωρούμε, μέσω γνωστού θεωρήματος, απλές και μετρήσιμες συναρτήσεις s_n που αυξάνουν στην f, $0\le s_n\le |f|$ $\forall n$ και $s_n \nearrow f$.
Θέτουμε $f_n = s_n\cdot \operatorname{sgn}(f)$: είναι $f_n \xrightarrow{n} f$ κ.σ. και $\forall n$ $\mu(\{x\in X : f_n(x)\neq 0\})<\infty$ ($(s_n)^p \le |f|^p \Rightarrow \int |s_n|^p \le \int |f|^p < \infty$. Επίσης, $|f_n - f|^p \le |f|^p \in L^1$ ($|f_n - f| = |s_n\cdot \operatorname{sgn}(f) - |f|\cdot\operatorname{sgn}(f)| = |f| - s_n \le |f|$).
Άρα, από Θ.Κ.Σ. λαμβάνουμε ότι $\int |f_n - f|^p \xrightarrow{n} 0$ $\Leftrightarrow$ $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n} 0$. □